位相をつなぐ - 代数的位相アンラップとその応用

Continuation of Phase - Algebraic Phase Unwrapping and Its Applications

山田功　　北原大地
Isao Yamada　　Daichi Kitahara

東京工業大学 工学院 情報報通信系
Department of Information and Communications Engineering, Tokyo Institute of Technology

1　2 次元位相アンラップ問題

周知のように非零複素数 z の位相 (又は偏角) は $\frac{z}{|z|} = \cos\theta(z) + \imath\sin\theta(z) =: e^{\imath\theta(z)}$ ($\imath \in \mathbb{C}$ は虚数単位) を満たす $\theta(z) \in \mathbb{R}$ として定義されるが，$\theta(z)$ には 2π の整数倍の任意性があるため，上記を満たす $\theta(z)$ の中で区間 $(-\pi, \pi]$ に入る唯一の $[\theta(z)]_{\text{mod } 2\pi} \in (-\pi, \pi]$ (z の主値位相) が z の位相として広く代用されている [1]．ところが，リモート・センシングや生体画像処理，3 次元形状計測等の分野では，単連結領域 $\Omega(\subset \mathbb{R}^2)$ 上に定義された連続な複素数値関数 $\varphi : \Omega \to \mathbb{C}\backslash\{0\}$ に対する**連続位相関数**の関数値が物理的に価値のある情報を提供するため，主値位相関数 $[\theta \circ \varphi]_{\text{mod } 2\pi} : \Omega \to (-\pi, \pi]$ に適当な $\eta : \Omega \to \mathbb{Z}$ を加え，$[\theta \circ \varphi]_{\text{mod } 2\pi} + 2\pi\eta$ を連続関数にするプロセス (2 次元位相アンラップ: 2D-Phase Unwrapping) が必要になる [2, 3, 4, 5]．2 次元位相アンラップの究極の目標は主値位相関数の有限個の標本値 $[\theta(\varphi(x_k, y_k))]_{\text{mod } 2\pi}$ ($k \in \mathcal{I} := \{0, 1, 2, \ldots, p\}$) から，連続位相関数 $\Theta : \Omega \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto [\theta(\varphi(x, y))]_{\text{mod } 2\pi} + 2\pi\eta(x, y)$ を特定することであるが [2]，一般には標本値との**整合性条件**:「$(k \in \mathcal{I})\ [\Theta(x_k, y_k)]_{\text{mod } 2\pi} = [\theta(\varphi(x_k, y_k))]_{\text{mod } 2\pi}$」を満足する連続関数 Θ は無数に存在するため，推定値候補の集合から何らかの局所歪尺度を最小にする最適解の探索が実際の目標になる．2 次元位相アンラップのために，これまで数多くの定式化とアルゴリズムが提案されてきたが，不用意な定式化はしばしば NP 困難になってしまうため (例えば，[3])，信頼性の高いアルゴリズムの実現は至難の業となっていた．

小文では，2 次元位相アンラップ問題を見通しよく解決するために，筆者らが開発した新解法 [6] を支える 2 つの中心的アイディアを紹介する．

2　スカラーポテンシャル関数と位相アンラップ

Poincaré の補題 (e.g., [7]) を用いると，[12, Theorem 2] を基に以下の事実が確かめられる．

Proposition 1 (整合性条件を満たすスカラーポテンシャル) 2 つの C^2 級実数値関数 $f_{(0)}, f_{(1)} \in C^2(\Omega)$ が $(\forall (x, y) \in \Omega)\ f_{(0)}(x, y) + \imath f_{(1)}(x, y) \neq 0$ と

$$\begin{cases} (\forall k \in \mathcal{I}) \\ \left(\frac{f_{(0)}}{\sqrt{f_{(0)}^2 + f_{(1)}^2}}(x_k, y_k), \frac{f_{(1)}}{\sqrt{f_{(0)}^2 + f_{(1)}^2}}(x_k, y_k) \right) \\ = \left(\cos\left[\Theta(x_k, y_k)\right]_{\text{mod}2\pi}, \sin\left[\Theta(x_k, y_k)\right]_{\text{mod}2\pi}\right) \\ \\ [\theta_0]_{\text{mod}2\pi} = [\Theta(x_0, y_0)]_{\text{mod}2\pi} \end{cases}$$

を満たすとき，すべての $(x, y) \in \Omega$ に対して $\Upsilon(a) = (x_0, y_0)$, $\Upsilon(b) = (x, y)$ を満たす区分的 C^1 級関数 $\Upsilon : [a, b] \to \Omega$ と $\widetilde{f}_{(j)} := f_{(j)} \circ \Upsilon$ ($j = 0, 1$) を用意する．このとき，C^2 級関数 $\Theta_f : \Omega \to \mathbb{R}$ が

$$\Theta_f(x, y) := \theta_0 + \int_a^b \frac{\widetilde{f}'_{(1)}(t)\widetilde{f}_{(0)}(t) - \widetilde{f}_{(1)}(t)\widetilde{f}'_{(0)}(t)}{\widetilde{f}^2_{(0)}(t) + \widetilde{f}^2_{(1)}(t)} \mathrm{d}t \quad (1)$$

のように定義できる (注：関数 Θ_f は Υ の選択に拠らず一意に決定される)．さらに，Θ_f は整合性条件：

$$(\forall k \in \mathcal{I})\ [\Theta_f(x_k, y_k)]_{\text{mod } 2\pi} = [\Theta(x_k, y_k)]_{\text{mod } 2\pi} \quad (2)$$

を満たすことが保証される．

Remark 1 (Proposition 1 について)

(a) 式 (1) の被積分関数の正体は，複素対数関数 $\log[\widetilde{f}_{(0)}(t) + \imath\widetilde{f}_{(1)}(t)]$ の虚部の t に関する微分であるが，特に，$\widetilde{f}_{(0)}(t) \neq 0$ を満たす t では，$\frac{d}{d\tau}\left[\arctan\frac{\widetilde{f}_{(1)}(\tau)}{\widetilde{f}_{(0)}(\tau)}\right]\Bigg|_{\tau=t}$ に一致する．

(b) 命題の条件を満たす $(f_{(0)}, f_{(1)})$ と式 (1) によって定義された Θ_f は整合性条件 (2) を満たすスカラーポテンシャル関数となるため，Θ_f が Υ の選択に拠らず一意に決定される．

(c) $\{\Theta_f\}$ は，$(f_{(0)}, f_{(1)})$ でパラメータ表現された「Θ の推定値候補」の集合として利用できる．論文 [6] では，$(f_{(0)}, f_{(1)})$ に課せられる制約条件を凸緩和し，探索範囲を 2 変数スプライン関数 [8] に限定することにより，推定値候補集合上の局所歪尺度最小化問題を各 $f_{(j)} (j = 0, 1)$ についての凸最適化問題に帰着している (雑音に対するロバスト性も担保している)．さらに，都合の良い Υ を使っても矛盾なく定義されるスカラーポテンシャルの恩恵を活かすことにより，$\widetilde{f}_{(j)}$ を区分的 1 変数実多項式にすることができるので，次節で紹介する代数的位相アンラップ [9, 10, 11, 12] によって式 (1) の積分の精密計算が可能となり，信頼性の高い 2 次元位相アンラップが実現されている．

3　代数的位相アンラップ

区間 $[a, b] \subset \mathbb{R}$ 上に零点を持たない m 次多項式 $A(t) := \sum_{k=0}^m a_k t^k \in \mathbb{C}[t]$ の実部 $A_{(0)}(t) := \sum_{k=0}^m \Re(a_k)t^k \in \mathbb{R}[t]$ と虚部 $A_{(1)}(t) := \sum_{k=0}^m \Im(a_k)t^k \in \mathbb{R}[t]$ に対して

$$\Delta_A : (a, b] \ni t^* \mapsto \int_a^{t^*} \frac{A'_{(1)}(t)A_{(0)}(t) - A_{(1)}(t)A'_{(0)}(t)}{(A_{(0)}(t))^2 + (A_{(1)}(t))^2} \mathrm{d}t$$

2016/9/20 ～ 23　札幌市

を考える ($A_{(0)} \equiv 0$ 又は $A_{(1)} \equiv 0$ のとき，$\Delta_A(t^*) = 0$ となるので，以下では，それ以外のケースを議論する).

$$\mathcal{Z}_{A_{(0)}} := \{t \in (a,b) \mid A_{(0)}(t) = 0\} = \begin{cases} \varnothing & \text{if } A_{(0)}(t) \neq 0, \forall t \in (a,b); \\ \{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_z\} & \text{otherwise}, \end{cases}$$

(ただし，$\mu_0 := a < \mu_1 < \mu_2 < \cdots < \mu_z < b$) とおき，$\mu_k := \max\left((\{\mu_0\} \cup \mathcal{Z}_{A_{(0)}}) \cap [a, t^*)\right)$ を定義し，Remark 1(a) に注意すれば，$\mathcal{Q}_A(t) := \frac{A_{(1)}(t)}{A_{(0)}(t)}$ を用いて

$$\begin{aligned} \Delta_A(t^*) &= \int_a^{\mu_1} [\arctan(\mathcal{Q}_A(t))]' \, \mathrm{d}t \\ &\quad + \sum_{i=1}^{k-1} \int_{\mu_i}^{\mu_{i+1}} [\arctan(\mathcal{Q}_A(t))]' \, \mathrm{d}t + \int_{\mu_k}^{t^*} [\arctan(\mathcal{Q}_A(t))]' \, \mathrm{d}t \\ &= -\lim_{t \to a+0} \arctan(\mathcal{Q}_A(t)) + \lim_{t \to t^*-0} \arctan(\mathcal{Q}_A(t)) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{k} \lim_{\substack{\tau_1 \to \mu_i - 0 \\ \tau_2 \to \mu_i + 0}} [\arctan(\mathcal{Q}_A(\tau_1)) - \arctan(\mathcal{Q}_A(\tau_2))] \\ &= -\lim_{t \to a+0} \arctan(\mathcal{Q}_A(t)) \\ &\quad + \lim_{t \to t^*-0} \arctan(\mathcal{Q}_A(t)) + \sum_{\mu_i \in (a, t^*)} \mathcal{X}(\mu_i)\, \pi, \end{aligned} \tag{3}$$

と表せる．ただし，$\arctan : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ であり，

$$\mathcal{X}(\mu_i) := \begin{cases} +1 & \text{if } \begin{cases} \lim_{t \to \mu_i - 0} \mathcal{Q}_A(t) = +\infty \text{ and} \\ \lim_{t \to \mu_i + 0} \mathcal{Q}_A(t) = -\infty; \end{cases} \\ -1 & \text{if } \begin{cases} \lim_{t \to \mu_i - 0} \mathcal{Q}_A(t) = -\infty \text{ and} \\ \lim_{t \to \mu_i + 0} \mathcal{Q}_A(t) = +\infty; \end{cases} \\ 0 & \text{otherwise}. \end{cases}$$

式 (3) は，*Sturm* の定理 (e.g., [1, Theorem 6.3c]) からヒントを得て構成された Algorithm 1 [11, 12](又は，部分終結式 [13] を利用し，多項式除算計算の回避を実現した [12, Algorithm 2 & 3]) によって計算された $\{\mathrm{sgn}(\Psi_k(t))\}_{k=0}^q$ を用いることにより，以下のような代数的表現 (「実軸に沿った代数的位相アンラップ」とよんでいる．式 (3) の極限評価が不要となったことに注意されたい) に帰着できる (注：[離散時間・連続時間] 線形システムの位相特性のアンラップは各々，単位円周と虚軸に沿った代数的位相アンラップ [9, 10] で解明済なので参照されたい).

$$\begin{aligned} \Delta_A(t^*) = &-\begin{cases} \arctan(\mathcal{Q}_A(a)) & \text{if } A_{(0)}(a) \neq 0; \\ \mathrm{sgn}(\Psi_0(a)\Psi_1(a))\dfrac{\pi}{2} & \text{if } A_{(0)}(a) = 0, \end{cases} \\ &+ \begin{cases} \arctan(\mathcal{Q}_A(t^*)) + \left[V(\Psi(t^*)) - V(\Psi(a))\right]\pi & \\ \qquad \text{if } A_{(0)}(t^*) \neq 0; \\ \dfrac{\pi}{2} + \left[V(\Psi(t^*)) - V(\Psi(a))\right]\pi & \text{if } A_{(0)}(t^*) = 0; \end{cases} \end{aligned}$$

ただし，$V(\Psi(t)) := \sharp\{i \mid 0 \leq i < q,\ \Psi_i(t)\Psi_{i+\varrho(i)}(t) < 0\}$ ($\varrho(i) := \min\{k \in \mathbb{N}^* \mid \Psi_{i+k}(t) \neq 0\}$) は $(\Psi_0(t) \to \Psi_1(t) \to \cdots \to \Psi_q(t))$ に顕れる符号変化数.

Algorithm 1 スツルム列生成アルゴリズム

Input: $A_{(0)}(t) \in \mathbb{R}[t]$, $A_{(1)}(t) \in \mathbb{R}[t]$ and $a \in \mathbb{R}$
Output: $(\Psi_k(t))_{k=0}^q$

1: $\Psi_0(t) \leftarrow \frac{A_{(0)}(t)}{(t-a)^{e_0}}$ (e_0: order of a as a zero of polynomial $A_{(0)}$)
2: $\Psi_1(t) \leftarrow \frac{A_{(1)}(t)}{(t-a)^{e_1}}$ (e_1: order of a as a zero of polynomial $A_{(1)}$)
3: $k \leftarrow 1$
4: **while** $\deg(\Psi_k) \geq 1$ ($\deg(\Psi_j)$: degree of polynomial Ψ_j) **do**
5: $\quad \Psi_{k+1}(t) \leftarrow -\mathrm{rem}(\Psi_{k-1}, \Psi_k)$
$\quad$ ($\mathrm{rem}(\Psi_{k-1}, \Psi_k)$: remainder of division of Ψ_{k-1} by Ψ_k)
6: $\quad k \leftarrow k+1$
7: **end while**
8: $q \leftarrow \begin{cases} k & \text{if } \Psi_k(t) \not\equiv 0 \\ k-1 & \text{if } \Psi_k(t) \equiv 0 \end{cases}$
9: Return $(\Psi_k(t))_{k=0}^q$

参考文献

[1] P. Henrici, Applied and Computational Complex Analysis, vol.1, Wiley Classic library Edition, 1988.

[2] D. C. Ghiglia and M. D. Pritt, Two-Dimensional Phase Unwrapping: Theory, Algorithms, Software, Wiley, 1998.

[3] C. W. Chen and H. A. Zebker, “Network approaches to two-dimensional phase unwrapping: Intractability and two new algorithms,” J. Opt. Soc. Amer. A, Opt., Image Sci., Vis., vol.17, no.3, pp.401-414, 2000.

[4] R. F. Hanssen, Radar Interferometry: Data Interpretation and Error Analysis. Kluwer, 2001.

[5] P. A. Rosen, S. Hensley, I. R. Joughin, F. K. Li, S. N. Madsen, E. Rodriguez, and R. M. Goldstein, “Synthetic aperture radar interferometry,” Proc.IEEE, vol.88, no.3, pp.333-382, 2000.

[6] D. Kitahara and I. Yamada, “Algebraic phase unrapping based on two-dimensional Spline smoothing over triangles,” IEEE Trans. Signal Process., vol.64, no.8, pp.2103-2118, 2016.

[7] A. Galbis and M. Maestre, Vector Analysis Versus Vector Calculus, Springer, 2012.

[8] M. J. Lai and L. L. Schumaker, Spline Functions on Triangulations, Cambridge Univ. Press, 2007.

[9] I. Yamada, K. Kurosawa, H. Hasegawa and K. Sakaniwa, “Algebraic multidimensional phase unwrapping and zero distribution of complex polynomials -Characterization of multivariate stable polynomials,” IEEE Trans. Signal Process., vol.46, no.6, pp.1639-1664,1998.

[10] I. Yamada and N. K. Bose, “Algebraic phase unwrapping and zero distribution of polynomial for continuous-time systems,” IEEE Trans. Circuits Syst. I, Fundam. Theory Appl.,vol.49, no.3, pp.298-304,2002.

[11] I. Yamada and K. Oguchi,“High-resolution estimation of the directions-of-arrival distribution by algebraic phase unwrapping algorithms,” Multidimens. Syst. Signal Process., vol.22, no.1-3, pp.191-211,2011.

[12] D. Kitahara and I. Yamada, “Algebraic phase unwrapping along the real axis: Extensions and stabilizations,” Multidimens. Syst. Signal Process., vol.26, no.1, pp.3-45, 2015.

[13] W. S. Brown and J. F. Traub, “On Euclid’s algorithm and the theory of subresultants,” J. ACM, vol.18, no.4, pp.505-514, Oct. 1971.