Huber 損失関数を用いたロバストな三重位相差型 GPS

A Robust Global Positioning System with Triple Phase Differences and Huber Loss Function

森 和也 †　　北原 大地 †　　山岸 昌夫 †　　山田 功 †
† 東京工業大学 大学院 通信情報工学専攻

Kazuya MORI†　　Daichi KITAHARA†　　Masao YAMAGISHI†　　Isao YAMADA†
†Department of Communications and Computer Engineering, Tokyo Institute of Technology

あらまし　自動運転システム等の開発のため，GPS により獲得できる位置情報の更なる高精度化が期待されている．従来，高精度な位置情報は，複数の受信機で受信された GPS 信号の搬送波位相値の二重差分である，二重位相差を基に，「3 次元位置情報と不確定整数値が混合した困難な最適化問題」のヒューリスティックな近似解法に頼って測定されていた．ところが，この測位法は，不確定整数値の変動の影響を受けやすく，深刻な測位誤差を生む要因となっている．本研究では，二重位相差の隣接時刻間における差分として定義される，三重位相差を用いることで，不確定整数値特定問題を回避すると共に，Huber 損失関数による評価基準を採用することで，不確定整数値の変動に対してロバストな測位法を提案する．

1　はじめに

位置情報を利用した技術の研究開発が盛んな昨今，GPS (Global Positioning System) 測位 [1]–[3] の更なる高精度化に対する期待が高まっている．例えば，GPS を利用した，自動運転車 [4], [5] や土砂災害検知システム [6] の開発は，GPS の測位精度が低い場合，極めて重大な事故に繋がる危険性を孕んでいる．また，GPS から収集されたデータによる，交通渋滞の傾向分析 [7] や個人の生活の記録・解析 [8] の際にも，より高精度な位置情報が求められている．

本研究では，GPS 信号の搬送波位相による測位システムの高精度化について検討する．このシステムでは，搬送波位相と共に GPS 信号に含まれる衛星の軌道情報のデータが活用され，受信機は自らの位置を時々刻々と推定する．

高精度測位には，複数の受信機が協調して，衛星や受信機の時計誤差等の影響を抑圧する相対測位が適していることが知られている [1]．相対測位では，複数の受信機で受信された，同一組からなる衛星の搬送波位相値の二重差分 (二重位相差とよぶ) を用いる方法が代表的であるが，この測位法では，二重位相差に含まれる，不確定な 2π の整数倍 (不確定整数値とよぶ) を特定する必要があるため，測位精度は整数制約付き最適化問題の近似解法 [9], [10] の性能に大きく左右される．不確定整数値が時刻に依らず一定の場合には，隣接時刻間での二重位相差の差分 (三重位相差とよぶ) を用いることで，不確定整数値特定問題の回避が可能なため，三重位相差に関するデータ整合性を二乗誤差によって評価し，最小化する方法も検討されてきた [11]．しかしながら，従来の二重位相差や三重位相差を用いた GPS 測位 (本稿では，それぞれ，二重位相差型 GPS，三重位相差型 GPS とよぶ) は，不確定整数値が時刻に依って変動している (サイクルスリップとよぶ) 場合に，測位精度が急激に劣化してしまう問題を抱えていた．

本研究では，サイクルスリップにロバストな三重位相差型 GPS の新手法を提案する．提案法は，三重位相差が内包する，サイクルスリップ起因の誤差がインパルス性雑音と見なせることに着目し，この影響にロバストな測位を実現している．具体的には，三重位相差に関するデータ整合性を Huber 損失関数 [12] によって評価し，これを最小にする位置を推定値として採用する方針に基づいている．ただし，この評価関数は高い非線形性を持つため，部分的な線形近似によって簡略化された凸最適化問題を繰り返し解く近似アルゴリズムを提案している．実際に数値実験において，提案法により，特にサイクルスリップ発生時の測位精度が著しく改善されることを確認している．

2　搬送波位相による GPS 測位原理

2.1　数学的準備

$\mathbb{R}, \mathbb{R}_+, \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_+$ をそれぞれ，実数全体，非負の実数全体，整数全体，非負の整数全体の集合とする．太字はベクトルまたは行列を表し，ベクトル $\boldsymbol{x} := (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ のノルムを $\|\boldsymbol{x}\| := \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$ と定義する．実数 $x \in \mathbb{R}$ を四捨五入して得られる整数を $[\![x]\!] \in \mathbb{Z}$ で表す．

以下では，衛星や受信機の 3 次元位置 $(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3$ は地球中心・地球固定座標系 (Earth-Centered Earth-Fixed (ECEF) coordinate system) で表現されているものとする．地球中心・地球固定座標系は，原点を地球の重心にとり，

本研究の一部は科学研究費補助金 (15K13986) の御支援で実施された．

x 軸の正方向を原点から赤道と本初子午線の交点方向に，y 軸の正方向を原点から赤道と東経 90 度線の交点方向に，z 軸の正方向を原点から北極点方向にとる，地球の自転と共に回転する直交座標系である．また，GPS 分野における慣例に倣い，衛星に関するインデックスを記号の右上に，受信機に関するインデックスを記号の右下に付す．

2.2 搬送波位相に関する観測方程式

時刻 t において，位置 $\boldsymbol{u}_A(t) := (x_A(t), y_A(t), z_A(t))^T$ にある受信機 A が，位置 $\boldsymbol{u}^i(t) := (x^i(t), y^i(t), z^i(t))^T$ の衛星 i から送信された GPS 信号を受信する状況を考える．受信機 A の観測によって得られた搬送波位相値 $\Phi_A^i(t) \in \mathbb{R}$ (以下，搬送波位相の単位は [cycle] := [radian/2π] とする) と衛星 i・受信機 A 間の距離 $\rho_A^i(t) := \|\boldsymbol{u}_A(t) - \boldsymbol{u}^i(t)\| = \sqrt{(x_A(t)-x^i(t))^2 + (y_A(t)-y^i(t))^2 + (z_A(t)-z^i(t))^2}$ との間には

$$\lambda\left(\Phi_A^i(t) + N_A^i(t)\right) = \rho_A^i(t) + c(\delta_A - \delta^i) - I_A^i + T_A^i + \epsilon_A^i(t) \tag{1}$$

が成立する．ただし，$\lambda \in \mathbb{R}_+$ は搬送波の波長，$N_A^i(t) \in \mathbb{Z}_+$ は搬送波位相における不確定整数値，$c \in \mathbb{R}_+$ は光速度，$\delta_A, \delta^i \in \mathbb{R}$ はそれぞれ，受信機 A，衛星 i の内部時計誤差，$I_A^i, T_A^i \in \mathbb{R}_+$ はそれぞれ，電離層，対流圏に起因する誤差，$\epsilon_A^i(t) \in \mathbb{R}$ はその他の観測雑音である [1]．

搬送波位相値 $\Phi_A^i(t)$ は，観測開始時刻 $t=0$ において，$\Phi_A^i(0) \in [0,1)$ と観測されるが，以降の時刻においては，GPS 信号を追尾し，位相変動量を逐次足し合わせることで，

$$\Phi_A^i(t+1) := \Phi_A^i(t) + \Delta\Phi_A^i(t, t+1) \tag{2}$$

のように観測される [1]．ただし，$\Delta\Phi_A^i(t, t+1) \in \mathbb{R}$ は時刻 $[t, t+1]$ 間に受信機が追尾した位相変動量である．

本稿では，観測雑音 $\epsilon_A^i(t)$ が常に $\epsilon_A^i(t) \in (-\frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{2}]$ であると想定する．このとき，式 (1) の不確定整数値 $N_A^i(t)$ は

$$N_A^i(t) = \left[\!\left[\frac{\rho_A^i(t) + c(\delta_A - \delta^i) - I_A^i + T_A^i}{\lambda} - \Phi_A^i(t) \right]\!\right] \tag{3}$$

を満たす．式 (1), (2), (3) から，時刻 $[t, t+1]$ 間における位相変動量の追尾値 $\Delta\Phi_A^i(t, t+1)$ が

$$-\frac{1}{2} < \Delta\Phi_A^i(t, t+1) - \frac{\rho_A^i(t+1) - \rho_A^i(t) - \epsilon_A^i(t)}{\lambda} \le \frac{1}{2} \tag{4}$$

を満たすとき，

$$N_A^i(t+1) = N_A^i(t) \tag{5}$$

が成立し，時刻 t と時刻 $t+1$ の不確定整数値は一致する．しかしながら，時刻 $[t, t+1]$ 間に，障害物により衛星からの GPS 信号が一時遮断される場合や，マルチパスの影響が大きい場所を受信機が通過する場合には，位相変動量の追尾に失敗するため，式 (4) 及び式 (5) は成立しない．この現象はサイクルスリップとよばれる [1]．

2.3 二重位相差型 GPS

式 (1) には様々な観測誤差 $\delta_A, \delta^i, I_A^i, T_A^i$ が含まれるが，受信機 A が観測する搬送波位相 $\Phi_A^i(t)$ のみから測位を行う単独測位では，δ^i を無視し，I_A^i と T_A^i を大気モデルにより計算された値に置き換え，式 (1) から位置 $\boldsymbol{u}_A(t)$ を推定する．一方，$\boldsymbol{u}_A(t)$ に近い，既知の位置 $\boldsymbol{u}_B := (x_B, y_B, z_B)^T$ に設置された受信機 B が観測する搬送波位相 $\Phi_B^i(t)$ を併用して測位を行う相対測位では，受信機 A, B が観測した搬送波位相 $\Phi_A^i(t), \Phi_B^i(t)$ の差分 (一重位相差とよぶ)

$$\begin{aligned}\lambda\Phi_{A,B}^i(t) &:= \lambda\left(\Phi_B^i(t) - \Phi_A^i(t)\right) \\ &= \rho_{A,B}^i(t) - \lambda N_{A,B}^i(t) + c\delta_{A,B} + \epsilon_{A,B}^i(t)\end{aligned} \tag{6}$$

を計算することで，先ず誤差 δ^i, I_A^i, T_A^i を観測方程式から消去する．ただし，$\rho_{A,B}^i(t) := \rho_B^i(t) - \rho_A^i(t)$, $N_{A,B}^i(t) := N_B^i(t) - N_A^i(t)$, $\delta_{A,B} := \delta_B - \delta_A$, $\epsilon_{A,B}^i(t) := \epsilon_B^i(t) - \epsilon_A^i(t)$ であり，受信機 A, B 間の距離 $\|\boldsymbol{u}_B - \boldsymbol{u}_A(t)\|$ が短いため (約 10 [km] 以下), $I_A^i = I_B^i, T_A^i = T_B^i$ が仮定できる [13]．さらに，衛星 i, j に関する一重位相差 $\Phi_{A,B}^i(t), \Phi_{A,B}^j(t)$ の差分 (二重位相差とよぶ)

$$\begin{aligned}\Psi_{A,B}^{i,j}(t) &:= \lambda\Phi_{A,B}^{i,j}(t) := \lambda\left(\Phi_{A,B}^j(t) - \Phi_{A,B}^i(t)\right) \\ &= \rho_{A,B}^{i,j}(t) - \lambda N_{A,B}^{i,j}(t) + \epsilon_{A,B}^{i,j}(t)\end{aligned} \tag{7}$$

を計算することで，式 (6) に残っている誤差 $\delta_{A,B}$ を消去する．ただし，$\rho_{A,B}^{i,j}(t) := \rho_{A,B}^j(t) - \rho_{A,B}^i(t)$, $N_{A,B}^{i,j}(t) := N_{A,B}^j(t) - N_{A,B}^i(t)$, $\epsilon_{A,B}^{i,j}(t) := \epsilon_{A,B}^j(t) - \epsilon_{A,B}^i(t)$ である．この方式では，誤差 $\delta_A, \delta^i, I_A^i, T_A^i$ が消去された式 (7) から位置 $\boldsymbol{u}_A(t)$ を推定するため，単独測位に比べ，相対測位は高精度な測位が可能となる．

従来の二重位相差型 GPS では，それぞれの衛星 $i = 1, 2, \ldots, s$ と受信機 A, B に関して，全ての時刻間 $[t, t+1]$ $(t = 0, 1, \ldots, k-1)$ でサイクルスリップが発生せず，その結果 $i = 2, 3, \ldots, s$ で，

$$N_{A,B}^{1,i}(0) = N_{A,B}^{1,i}(1) = \cdots = N_{A,B}^{1,i}(k) =: N_{A,B}^{1,i} \in \mathbb{Z} \tag{8}$$

が成立していることを想定している．このとき，各時刻において，独立な観測方程式 (7) の数は $s-1$ 個であるが，未知数の数は 3 対の実数 $\boldsymbol{u}_A(t) = (x_A(t), y_A(t), z_A(t))^T$ と $s-1$ 対の整数 $\boldsymbol{N} := (N_{A,B}^{1,2}, N_{A,B}^{1,3}, \cdots, N_{A,B}^{1,s})^T \in \mathbb{Z}^{s-1}$ の計 $s+2$ 個であるため，これらを各時刻の二重位相差のみから特定することは不可能である．したがって，時刻 $t = 0, 1, \ldots, k \ge \frac{3}{s-4}$ (ただし，$s \ge 5$)[1] の全ての二重位相差を使用し，最適化問題

$$\underset{(\boldsymbol{U}_A, \boldsymbol{N}) \in \mathbb{R}^{3(k+1)} \times \mathbb{Z}^{s-1}}{\text{minimize}} \sum_{t=0}^{k} \sum_{i=2}^{s} \left|\Psi_{A,B}^{1,i}(t) - \rho_{A,B}^{1,i}(t) + \lambda N_{A,B}^{1,i}\right|^2 \tag{9}$$

[1] このとき，独立な観測方程式の数 $(k+1)(s-1)$ が未知数の数 $3(k+1)+s-1$ 以上になるため，未知数を推定できる．

に基づき，$\boldsymbol{U}_A := (\boldsymbol{u}_A^T(0), \boldsymbol{u}_A^T(1), \cdots, \boldsymbol{u}_A^T(k))^T \in \mathbb{R}^{3(k+1)}$ と $\boldsymbol{N}$ を推定する．ここで，衛星 $i\,(i=1,2,\ldots,s)$ の位置 $\boldsymbol{u}^i(t)$ はGPS信号に含まれる衛星の軌道情報から獲得され，また，受信機 B の位置は既知点 $\boldsymbol{u}_B$ に固定されているため，$\rho_{A,B}^{1,i}(t) = \rho_B^i(t) - \rho_A^i(t) - \rho_B^1(t) + \rho_A^1(t) = \|\boldsymbol{u}_B - \boldsymbol{u}^i(t)\| - \|\boldsymbol{u}_A(t) - \boldsymbol{u}^i(t)\| - \|\boldsymbol{u}_B - \boldsymbol{u}^1(t)\| + \|\boldsymbol{u}_A(t) - \boldsymbol{u}^1(t)\|$ は $\boldsymbol{u}_A(t)$ を変数とする非線形関数になることに注意されたい．一旦 $\boldsymbol{N}$ が定まり，時刻 $t=k+1$ 以降もサイクルスリップが発生しない場合には，各時刻の未知数は3対の実数 $\boldsymbol{u}_A(t)$ になるため，各時刻の二重位相差のみから推定可能となる．

文献 [9] では，上記の二重位相差型 GPS の方針を以下のように実現している．

1. 式 (9) において，$\boldsymbol{N}$ を実数値ベクトルと見なして，以下の最小解 $(\widetilde{\boldsymbol{U}}_A, \widetilde{\boldsymbol{N}}) \in \mathbb{R}^{3(k+1)} \times \mathbb{R}^{s-1}$ を求める．
$$\sum_{t=0}^{k}\sum_{i=2}^{s}\left|\Psi_{A,B}^{1,i}(t) - \rho_{A,B}^{1,i}(t) + \lambda N_{A,B}^{1,i}\right|^2.$$
$(\widetilde{\boldsymbol{U}}_A, \widetilde{\boldsymbol{N}})$ は FLOAT 解とよばれる．
2. LAMBDA 法 [9] 等により，$\widetilde{\boldsymbol{N}}$ を整数値ベクトル $\widehat{\boldsymbol{N}} := (\widehat{N}_{A,B}^{1,2}, \widehat{N}_{A,B}^{1,3}, \ldots, \widehat{N}_{A,B}^{1,s})^T \in \mathbb{Z}^{s-1}$ に修正する．
3. 式 (9) において，$\boldsymbol{N}$ を $\widehat{\boldsymbol{N}}$ に置き換え，$t=0,1,\ldots,k$ に対し，以下の最小解 $\widehat{\boldsymbol{u}}_A(t) \in \mathbb{R}^3$ を求める．
$$\sum_{i=2}^{s}\left|\Psi_{A,B}^{1,i}(t) - \rho_{A,B}^{1,i}(t) + \lambda \widehat{N}_{A,B}^{1,i}\right|^2. \tag{10}$$
$(\widehat{\boldsymbol{U}}_A, \widehat{\boldsymbol{N}}) := ((\widehat{\boldsymbol{u}}_A^T(0), \widehat{\boldsymbol{u}}_A^T(1), \ldots, \widehat{\boldsymbol{u}}_A^T(k))^T, \widehat{\boldsymbol{N}})$ は FIX 解とよばれ，最終的な推定値として用いられる．
4. 以降は，各時刻 $t \geq k+1$ において，式 (10) の最小解 $\widehat{\boldsymbol{u}}_A(t) \in \mathbb{R}^3$ を求め，推定値として用いる．

2.4 従来の三重位相差型 GPS

二重位相差型 GPS では，式 (9) の整数実数混合型最適化問題を解くことが要請されているため，厳密解を求める実用的な解法は未だ確立されていない (例えば，[9], [10] 等のヒューリスティックな整数探索が必要となっている)．整数制約の困難さを回避するために，三重位相差

$$\begin{aligned}\Delta\Psi_{A,B}^{i,j}(t,t+1) &:= \lambda\left(\Phi_{A,B}^{i,j}(t+1) - \Phi_{A,B}^{i,j}(t)\right)\\ &= \Delta\rho_{A,B}^{i,j}(t,t+1) - \lambda\Delta N_{A,B}^{i,j}(t,t+1) + \Delta\epsilon_{A,B}^{i,j}(t,t+1)\end{aligned} \tag{11}$$

の利用が考えられる [11]．ただし，$\Delta\rho_{A,B}^{i,j}(t,t+1) := \rho_{A,B}^{i,j}(t+1) - \rho_{A,B}^{i,j}(t)$, $\Delta N_{A,B}^{i,j}(t,t+1) := N_{A,B}^{i,j}(t+1) - N_{A,B}^{i,j}(t)$, $\Delta\epsilon_{A,B}^{i,j}(t,t+1) := \epsilon_{A,B}^{i,j}(t+1) - \epsilon_{A,B}^{i,j}(t)$ である．

実際に条件 (8) の下では，

$$\Delta\Psi_{A,B}^{i,j}(t,t+1) = \Delta\rho_{A,B}^{i,j}(t,t+1) + \Delta\epsilon_{A,B}^{i,j}(t,t+1) \tag{12}$$

が成立し，最適化問題

$$\underset{\boldsymbol{U}_A \in \mathbb{R}^{3(k+1)}}{\text{minimize}} \sum_{t=0}^{k-1}\sum_{i=2}^{s}\left|\Delta\Psi_{A,B}^{1,i}(t,t+1) - \Delta\rho_{A,B}^{1,i}(t,t+1)\right|^2 \tag{13}$$

を解くことにより $\boldsymbol{U}_A$ の推定が実現される．しかしながら，式 (12) は，条件 (8) の内 $N_{A,B}^{1,i} \in \mathbb{Z}$ が必ずしも反映されていないため，二重位相差型 GPS に比べ測位精度の向上が見込めないとされている [11] (4 節の表 1, 2 参照)．ただし，サイクルスリップ発生時には，式 (9) に基づく二重位相差型 GPS に比べ，僅かではあるがロバストな測位が実現される [11] (4 節の表 1, 2 参照)．

3 サイクルスリップにロバストな三重位相差型 GPS

3.1 Huber 損失関数を用いた三重位相差型 GPS

本研究では，サイクルスリップの発生は稀であるため，ほとんどの時刻間で $\Delta N_{A,B}^{i,j}(t,t+1) = 0$ が成立していることに着目し，式 (11) の $\lambda\Delta N_{A,B}^{i,j}(t,t+1)$ をインパルス性雑音として扱う．この観点で見ると，式 (13) の最小化基準は，大きなインパルス性雑音 $|\lambda\Delta N_{A,B}^{i,j}(t,t+1)| \geq \lambda$ を小さな観測雑音 $\Delta\epsilon_{A,B}^{i,j}(t,t+1)$ と同等に評価しているため，ロバスト性が損なわれてしまうことが想像できる．そこで，大きな外れ値に対してロバストな最小化基準である，Huber 損失関数 (Huber loss function) [12]:

$$H_\mu(\tau) := \begin{cases} \dfrac{\tau^2}{2\mu} & \text{if } \tau \in [-\mu, \mu] \\ |\tau| - \dfrac{\mu}{2} & \text{if } \tau \notin [-\mu, \mu] \end{cases}$$

(ただし，$\mu \in \mathbb{R}_+$) を導入した最適化問題

$$\underset{\boldsymbol{U}_A \in \mathbb{R}^{3(k+1)}}{\text{minimize}} \sum_{t=0}^{k-1}\sum_{i=2}^{s} H_\mu\left(\Delta\Psi_{A,B}^{1,i}(t,t+1) - \Delta\rho_{A,B}^{1,i}(t,t+1)\right) \tag{14}$$

を測位の基本方針にすることを提案する．

式 (14) に基づく提案法は，時刻 $t=0,1,\ldots,k$ 間の全ての三重位相差から $\boldsymbol{U}_A$ を推定する初期化処理 (ステップ 1) と，時刻 $t \geq k+1$ と $t-1$ 間の三重位相差のみから $\boldsymbol{u}_A(t)$ を推定する逐次処理 (ステップ 2) に分けられる．

1. 以下の最小解 $\boldsymbol{U}_A^* \in \mathbb{R}^{3(k+1)}$ を求める (3.2 節参照)．
$$\sum_{t=0}^{k-1}\sum_{i=2}^{s} H_\mu\left(\Delta\Psi_{A,B}^{1,i}(t,t+1) - \Delta\rho_{A,B}^{1,i}(t,t+1)\right). \tag{15}$$
$\boldsymbol{U}_A^* := (\boldsymbol{u}_A^{*T}(0), \boldsymbol{u}_A^{*T}(1), \ldots, \boldsymbol{u}_A^{*T}(k))^T$ は推定値として用いられる．
2. 以降は，各時刻 $t \geq k+1$ において，以下の最小解 $\widehat{\boldsymbol{u}}_A(t) \in \mathbb{R}^3$ を求め (3.3 節参照)，推定値として用いる．
$$\sum_{i=2}^{s} H_\mu\left(\Delta\Psi_{A,B}^{1,i}(t-1,t) - \Delta\rho_{A,B}^{1,i}(t-1,t)\right). \tag{16}$$

3.2 式 (15) の最小化

式 (15) の $\Delta\rho_{A,B}^{1,i}(t,t+1) = \rho_{A,B}^{1,i}(t+1) - \rho_{A,B}^{1,i}(t)$ は $\boldsymbol{u}_A(t)$ と $\boldsymbol{u}_A(t+1)$ を変数とする非線形関数であるため，$\Delta\rho_{A,B}^{1,i}(t,t+1)$ の線形近似によって得られる凸最適化問題を繰り返し解き，$\boldsymbol{U}_A^* = (\boldsymbol{u}_A^{*T}(0), \boldsymbol{u}_A^{*T}(1), \ldots, \boldsymbol{u}_A^{*T}(k))^T$ を近似計算する．具体的には，$\boldsymbol{u}_A^*(t)$ の n 回目 ($n \in \mathbb{Z}_+$) の推定値を $\boldsymbol{u}_{A,n}(t) := (x_{A,n}(t), y_{A,n}(t), z_{A,n}(t))^T$ ($t = 0,1,\ldots,k$) として，非線形関数 $\Delta\rho_{A,B}^{1,i}(t,t+1)$ を $\boldsymbol{U}_{A,n} := (\boldsymbol{u}_{A,n}^T(0), \boldsymbol{u}_{A,n}^T(1), \ldots, \boldsymbol{u}_{A,n}^T(k))^T$ の周りの Taylor 展開によって線形近似すると，凸最適化問題

$$\text{Find } \boldsymbol{V}_n^* \in \operatorname*{argmin}_{\boldsymbol{V}_n \in \mathbb{R}^{3(k+1)}} G_\mu(\boldsymbol{\Omega}_n - \boldsymbol{L}_n \boldsymbol{V}_n) \tag{17}$$

に帰着できる．ただし，$\boldsymbol{V}_n := \boldsymbol{U}_A - \boldsymbol{U}_{A,n} \in \mathbb{R}^{3(k+1)}$ とし，$\boldsymbol{\Omega}_n \in \mathbb{R}^{k(s-1)}$ と $\boldsymbol{L}_n \in \mathbb{R}^{k(s-1)\times 3(k+1)}$ は式 (18) のように定義され，$G_\mu : \mathbb{R}^{k(s-1)} \to \mathbb{R}_+ : (\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_{k(s-1)})^T \mapsto \sum_{i=1}^{k(s-1)} H_\mu(\tau_i)$ である．式 (17) の最小解 $\boldsymbol{V}_n^*$ は，例えば，交互方向乗数法 (Alternating Direction Method of Multipliers (ADMM)) [14] 等により計算できる (付録 A 参照)．

$\boldsymbol{V}_n^*$ が求まると，$n+1$ 回目の推定値は

$$\boldsymbol{U}_{A,n+1} := \boldsymbol{U}_{A,n} + \boldsymbol{V}_n^*$$

となり，上記の過程を繰り返して得られる $(\boldsymbol{U}_{A,n})_{n=0}^\infty$ の極限として，式 (15) の最小解 $\boldsymbol{U}_A^*$ を近似計算する．

3.3 式 (16) の最小化

式 (16) の関数 $\Delta\rho_{A,B}^{1,i}(t-1,t)$ は，時刻 $t-1$ における測位結果 $\boldsymbol{u}_A^*(t-1)$ を代入すれば，$\boldsymbol{u}_A(t)$ のみを変数とする非線形関数である．したがって，$\Delta\rho_{A,B}^{1,i}(t-1,t)$ を $\boldsymbol{u}_A^*(t)$ の n 回目の推定値 $\boldsymbol{u}_{A,n}(t)$ の周りの Taylor 展開によって線形近似することで，凸最適化問題

$$\text{Find } \boldsymbol{v}_n^*(t) \in \operatorname*{argmin}_{\boldsymbol{v}_n(t) \in \mathbb{R}^3} g_\mu(\boldsymbol{\omega}_n(t) - \boldsymbol{l}_n(t)\boldsymbol{v}_n(t)) \tag{19}$$

に帰着させ，$\boldsymbol{v}_n^*(t)$ を計算する (付録 B 参照)．ただし，$\boldsymbol{v}_n(t) := \boldsymbol{u}_A(t) - \boldsymbol{u}_{A,n}(t) \in \mathbb{R}^3$ とし，$\boldsymbol{\omega}_n(t) \in \mathbb{R}^{s-1}$ と $\boldsymbol{l}_n(t) \in \mathbb{R}^{(s-1)\times 3}$ は式 (20) のように定義され，$g_\mu : \mathbb{R}^{s-1} \to \mathbb{R}_+ : (\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_{s-1})^T \mapsto \sum_{i=1}^{s-1} H_\mu(\tau_i)$ である．

$\boldsymbol{v}_n^*(t)$ が求まると，$n+1$ 回目の推定値は

$$\boldsymbol{u}_{A,n+1}(t) = \boldsymbol{u}_{A,n}(t) + \boldsymbol{v}_n^*(t)$$

となり，上記の過程を繰り返して得られる $(\boldsymbol{u}_{A,n}(t))_{n=0}^\infty$ の極限として，式 (16) の最小解 $\boldsymbol{u}_A^*(t)$ を近似計算する．

4 数値実験

4.1 衛星・受信機・搬送波位相に関する設定

衛星位置 $\boldsymbol{u}^i(t)$ は，JAXA (宇宙航空研究開発機構) によって公開されている GPS 衛星の軌道情報の中で，最も

$$\boldsymbol{\Omega}_n := \begin{pmatrix}
\Delta\Psi_{A,B}^{1,2}(0,1) - \Delta\rho_B^{1,2}(0,1) + \Delta\rho_{A,n}^{1,2}(0,1) \\
\Delta\Psi_{A,B}^{1,3}(0,1) - \Delta\rho_B^{1,3}(0,1) + \Delta\rho_{A,n}^{1,3}(0,1) \\
\vdots \\
\Delta\Psi_{A,B}^{1,s}(0,1) - \Delta\rho_B^{1,s}(0,1) + \Delta\rho_{A,n}^{1,s}(0,1) \\
\Delta\Psi_{A,B}^{1,2}(1,2) - \Delta\rho_B^{1,2}(1,2) + \Delta\rho_{A,n}^{1,2}(1,2) \\
\Delta\Psi_{A,B}^{1,3}(1,2) - \Delta\rho_B^{1,3}(1,2) + \Delta\rho_{A,n}^{1,3}(1,2) \\
\vdots \\
\Delta\Psi_{A,B}^{1,s}(1,2) - \Delta\rho_B^{1,s}(1,2) + \Delta\rho_{A,n}^{1,s}(1,2) \\
\vdots \\
\Delta\Psi_{A,B}^{1,2}(k-1,k) - \Delta\rho_B^{1,2}(k-1,k) + \Delta\rho_{A,n}^{1,2}(k-1,k) \\
\Delta\Psi_{A,B}^{1,3}(k-1,k) - \Delta\rho_B^{1,3}(k-1,k) + \Delta\rho_{A,n}^{1,3}(k-1,k) \\
\vdots \\
\Delta\Psi_{A,B}^{1,s}(k-1,k) - \Delta\rho_B^{1,s}(k-1,k) + \Delta\rho_{A,n}^{1,s}(k-1,k)
\end{pmatrix}, \quad
\boldsymbol{L}_n := \begin{pmatrix}
\nabla\rho_{A,n}^{1,2}(0) & -\nabla\rho_{A,n}^{1,2}(1) & & & \\
\nabla\rho_{A,n}^{1,3}(0) & -\nabla\rho_{A,n}^{1,3}(1) & & & \\
\vdots & \vdots & & & \\
\nabla\rho_{A,n}^{1,s}(0) & -\nabla\rho_{A,n}^{1,s}(1) & & & \\
 & \nabla\rho_{A,n}^{1,2}(1) & -\nabla\rho_{A,n}^{1,2}(2) & & \\
 & \nabla\rho_{A,n}^{1,3}(1) & -\nabla\rho_{A,n}^{1,3}(2) & & \\
 & \vdots & \vdots & & \\
 & \nabla\rho_{A,n}^{1,s}(1) & -\nabla\rho_{A,n}^{1,s}(2) & & \\
 & & \vdots & \ddots & \\
 & & & \nabla\rho_{A,n}^{1,2}(k-1) & -\nabla\rho_{A,n}^{1,2}(k) \\
 & & & \nabla\rho_{A,n}^{1,3}(k-1) & -\nabla\rho_{A,n}^{1,3}(k) \\
 & & & \vdots & \vdots \\
 & & & \nabla\rho_{A,n}^{1,s}(k-1) & -\nabla\rho_{A,n}^{1,s}(k)
\end{pmatrix}. \tag{18}$$

ただし，$\Delta\rho_B^{1,i}(t,t+1) := \rho_B^i(t+1) - \rho_B^1(t+1) - \rho_B^i(t) + \rho_B^1(t)$，$\Delta\rho_{A,n}^{1,i}(t,t+1) := \|\boldsymbol{u}_{A,n}(t+1) - \boldsymbol{u}^i(t+1)\| - \|\boldsymbol{u}_{A,n}(t+1) - \boldsymbol{u}^1(t+1)\| - \|\boldsymbol{u}_{A,n}(t) - \boldsymbol{u}^i(t)\| + \|\boldsymbol{u}_{A,n}(t) - \boldsymbol{u}^1(t)\|$ であり，$\nabla\rho_{A,n}^{1,i}(t) \in \mathbb{R}^{1\times 3}$ は以下である．

$$\nabla\rho_{A,n}^{1,i}(t) := \begin{pmatrix}
\dfrac{\partial\rho_A^i(t)}{\partial x_A(t)}(\boldsymbol{u}_{A,n}(t)) - \dfrac{\partial\rho_A^1(t)}{\partial x_A(t)}(\boldsymbol{u}_{A,n}(t)) \\[2mm]
\dfrac{\partial\rho_A^i(t)}{\partial y_A(t)}(\boldsymbol{u}_{A,n}(t)) - \dfrac{\partial\rho_A^1(t)}{\partial y_A(t)}(\boldsymbol{u}_{A,n}(t)) \\[2mm]
\dfrac{\partial\rho_A^i(t)}{\partial z_A(t)}(\boldsymbol{u}_{A,n}(t)) - \dfrac{\partial\rho_A^1(t)}{\partial z_A(t)}(\boldsymbol{u}_{A,n}(t))
\end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix}
\dfrac{x_{A,n}(t) - x^i(t)}{\|\boldsymbol{u}_{A,n}(t) - \boldsymbol{u}^i(t)\|} - \dfrac{x_{A,n}(t) - x^1(t)}{\|\boldsymbol{u}_{A,n}(t) - \boldsymbol{u}^1(t)\|} \\[2mm]
\dfrac{y_{A,n}(t) - y^i(t)}{\|\boldsymbol{u}_{A,n}(t) - \boldsymbol{u}^i(t)\|} - \dfrac{y_{A,n}(t) - y^1(t)}{\|\boldsymbol{u}_{A,n}(t) - \boldsymbol{u}^1(t)\|} \\[2mm]
\dfrac{z_{A,n}(t) - z^i(t)}{\|\boldsymbol{u}_{A,n}(t) - \boldsymbol{u}^i(t)\|} - \dfrac{z_{A,n}(t) - z^1(t)}{\|\boldsymbol{u}_{A,n}(t) - \boldsymbol{u}^1(t)\|}
\end{pmatrix}^T.$$

精度が高い最終暦[2]とよばれるデータを用いて算出した．このデータには5分毎の軌道情報しか記されていないため，最初の位置を $\boldsymbol{u}^i(0)$，5分後の位置を $\boldsymbol{u}^i(300)$ とし，$t = 1, 2, \ldots, 299$ における衛星位置は線形補間によって与えた．また，測位に使用する衛星数は $s = 6$ とした[3]．

受信機 A の位置は，$\boldsymbol{u}_A(0) := (3670, 3680, 3690)^T \times 10^3$ として，以降は，区間 $[-2, 2]$ の一様分布から生成された $\alpha_x(t), \alpha_y(t), \alpha_z(t)\ (t = 0, 1, \ldots, 299)$ を用い，$\boldsymbol{u}_A(t+1) := \boldsymbol{u}_A(t) + (\alpha_x(t), \alpha_y(t), \alpha_z(t))^T$ のように定める．受信機 B の位置は $\boldsymbol{u}_B := (3680, 3680, 3680)^T \times 10^3$ に固定される．式(1)の定数は，[1]を参考にして，それぞれ，$\lambda = 0.19$, $c = 3 \times 10^8$, $\delta_A = 0.01$, $\delta_B = -0.01$, $\delta^i = 1 \times 10^{-9}$, $I_A^i = I_B^i = 10$, $T_A^i = T_B^i = 20\ (i = 1, 2, \ldots, s)$ とした．

受信機 A が観測する搬送波位相値 $\Phi_A^i(t)$ の初期値は，$\Phi_A^i(0) := [\frac{\rho_A^i(0)+c(\delta_A-\delta^i)-I_A^i+T_A^i+\epsilon_A^i(0)}{\lambda}]_{\mathrm{mod}\,1}$ と定義する．ただし，観測雑音 $\epsilon_A^i(t) \in (-\frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{2}]$ は平均0，標準偏差 0.01λ のガウス分布から生成された値[4]とし，$[\cdot]_{\mathrm{mod}\,1} : \mathbb{R} \to [0, 1)$ は引数を1で割った際の余りを返す関数である．以降は，時刻 $[t, t+1]$ 間の位相変動量の追尾値を $\Delta\Phi_A^i(t, t+1) := \frac{\rho_A^i(t+1)-\rho_A^i(t)-\epsilon_A^i(t)}{\lambda} + \frac{\epsilon_A^i(t+1)}{\lambda} + \Delta N_A^i(t, t+1)$ とし，式(2)から $\Phi_A^i(t+1)\ (t = 0, 1, \ldots, 299)$ を計算する．ここで，$\Delta N_A^i(t, t+1) := N_A^i(t+1) - N_A^i(t)$ は，サイクルスリップ発生時に $\{\pm 1, \pm 2\}$ のいずれかの値をランダムでとるものとし，サイクルスリップの発生確率は0%, 5%, 10%の3つのケースで実験を行った[5]．受信機 B が観測する搬送波位相値 $\Phi_B^i(t)$ も同様に算出されるが，受信機 B においては，サイクルスリップが発生しない状況を想定した．

4.2 実験結果

以下では，時刻 $t = 0, 1, \ldots, k := 100$ のすべての観測値から $\boldsymbol{U}_A = (\boldsymbol{u}_A^T(0), \boldsymbol{u}_A^T(1), \cdots, \boldsymbol{u}_A^T(100))^T \in \mathbb{R}^{303}$ を推定する初期化処理と，各時刻 $t = 101, 102, \ldots, 300$ の観測値から $\boldsymbol{u}_A(t) \in \mathbb{R}^3$ を推定する逐次処理それぞれに対して，サイクルスリップが無い場合と有る場合における従来法と提案法の性能評価を行う．評価尺度には，位置 $\boldsymbol{u}_A(t)$ と推定値 $\bar{\boldsymbol{u}}_A(t)$ 間の平均距離 $E[\frac{1}{101}\sum_{t=0}^{100}\|\boldsymbol{u}_A(t) - \bar{\boldsymbol{u}}_A(t)\|]$, $E[\frac{1}{200}\sum_{t=101}^{300}\|\boldsymbol{u}_A(t) - \bar{\boldsymbol{u}}_A(t)\|]$ を用いた．ここで，$E[\cdot]$ は1000回の試行における平均値を表す．

表1: 初期化処理時における測位精度の比較.

サイクルスリップ	二重位相差型 GPS		三重位相差型 GPS	
	FLOAT 解	FIX 解	既存法	提案法
無し	0.0330	**0.0083**	0.1244	0.1251
有り (5%)	7.2754	7.2746	6.5904	**0.8324**
有り (10%)	10.3874	10.3891	9.2808	**1.2614**

表2: 逐次処理時における測位精度の比較.

サイクルスリップ	二重位相差型 GPS	三重位相差型 GPS	
	FIX 解	既存法	提案法
無し	**0.0056**	0.1322	0.1330
有り (5%)	7.0882	6.9189	**0.9697**
有り (10%)	10.0930	9.7573	**1.4378**

表1は，初期化処理時における従来法[6]と提案法[7]，各々の測位精度を示している．ここで，三重位相差型GPSの既存法は，式(15), (16)の $H_\mu(\cdot)$ を $|\cdot|^2$ に置き換えた場合に相当する．実験結果から，サイクルスリップが発生せず，式(8)が成立する場合には，従来法・提案法いずれも高い測位精度を示すことが確認できるが，特に二重位相差型GPSでは，整数値ベクトル $\boldsymbol{N}$ の特定に完全に成功しているため，FIX解による推定が優れた精度を示している．サイクルスリップが発生する状況では，二重位相差型GPSの測位精度は急激に劣化し，FLOAT解とFIX解の精度にほとんど差がなくなっている．従来の三重位相差型GPSは，二重位相差型GPSの測位精度と比較し，多少の改善が見られるものの，十分な測位精度は達成されていない．一方，提案する三重位相差型GPSは, サイクルスリップが発生する状況においても，高い測位精度が保たれており，ロバストな測位が実現されていることが確認できる．

表2は，逐次処理時における従来法と提案法，各々の測位精度を示している．初期化処理同様，提案法により，サイクルスリップに頑健な測位が実現されている．

[2]URL: http://qz-vision.jaxa.jp/USE/ja/finalp

[3]インデックス $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ が，公開されている衛星番号 2, 3, 5, 6, 7, 8 に対応する．

[4]$\epsilon_A^i(t) \notin (-\frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{2}]$ が生成された場合，再び $\epsilon_A^i(t)$ を生成しなおす．

[5]発生確率が 5% の場合には，各時刻において，区間 $[0, 1]$ の一様分布から生成された乱数値が 0.05 以下ならば，いずれか 1 つの衛星 $i \in \{2, 3, \ldots, s\}$ にのみサイクルスリップが発生するとした．発生確率 10% に関しても同様である．

[6]二重位相差型 GPS において，$\widetilde{\boldsymbol{N}} \in \mathbb{R}^{s-1}$ から $\widehat{\boldsymbol{N}} \in \mathbb{Z}^{s-1}$ への修正 (2.3 節参照) は $\widehat{N}_{A,B}^{1,i} := [\![\widetilde{N}_{A,B}^{1,i}]\!]\ (i = 2, 3, \ldots, s)$ とした．

[7]提案法において，Huber 損失関数のパラメータ (3.1 節参照) は $\mu = 0.05\lambda$ とし，ADMM のパラメータ (付録参照) は初期化処理時に $\kappa = 0.5$, 逐次処理時に $\kappa = 0.05$ とした．初期化処理時，逐次処理時の初期推定値をそれぞれ $\boldsymbol{U}_{A,0} := (\boldsymbol{u}_B^T, \boldsymbol{u}_B^T, \ldots, \boldsymbol{u}_B^T)^T \in \mathbb{R}^{303}$, $\boldsymbol{u}_{A,0}(t) := \boldsymbol{u}_A^*(t-1)$ とし，ADMM の収束条件は $\|\boldsymbol{V}_{n,\iota+1} - \boldsymbol{V}_{n,\iota}\|, \|\boldsymbol{v}_{n,\iota+1}(t) - \boldsymbol{v}_{n,\iota}(t)\| < 10^{-8}$，アルゴリズム全体の収束条件は $\|\boldsymbol{V}_n^*\|, \|\boldsymbol{v}_n^*(t)\| < 10^{-5}$ とした．

$$\boldsymbol{\omega}_n(t) := \begin{pmatrix} \Delta\Psi_{A,B}^{1,2}(t-1,t) - \Delta\rho_B^{1,2}(t-1,t) - \rho_{A,*}^{1,2}(t-1) + \rho_{A,n}^{1,2}(t) \\ \Delta\Psi_{A,B}^{1,3}(t-1,t) - \Delta\rho_B^{1,3}(t-1,t) - \rho_{A,*}^{1,3}(t-1) + \rho_{A,n}^{1,3}(t) \\ \vdots \\ \Delta\Psi_{A,B}^{1,s}(t-1,t) - \Delta\rho_B^{1,s}(t-1,t) - \rho_{A,*}^{1,s}(t-1) + \rho_{A,n}^{1,s}(t) \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{l}_n(t) := \begin{pmatrix} -\nabla\rho_{A,n}^{1,2}(t) \\ -\nabla\rho_{A,n}^{1,3}(t) \\ \vdots \\ -\nabla\rho_{A,n}^{1,s}(t) \end{pmatrix}. \tag{20}$$

ただし，$\rho_{A,*}^{1,i}(t-1) := \|\boldsymbol{u}_A^*(t-1) - \boldsymbol{u}^i(t-1)\| - \|\boldsymbol{u}_A^*(t-1) - \boldsymbol{u}^1(t-1)\|$，$\rho_{A,n}^{1,i}(t) := \|\boldsymbol{u}_{A,n}(t) - \boldsymbol{u}^i(t)\| - \|\boldsymbol{u}_{A,n}(t) - \boldsymbol{u}^1(t)\|$.

5　おわりに

本研究では，搬送波位相におけるサイクルスリップにロバストな GPS 測位法を提案した．提案する測位法は，三重位相差に含まれるサイクルスリップに起因する誤差をインパルス性雑音と見なし，Huber 損失関数によって評価されたデータ整合性基準の最小解を測位結果として採用している．数値実験により，提案する三重位相差型 GPS は，サイクルスリップ発生時においても，従来不可能であった高精度測位を達成していることが確認された．

A　凸最適化問題 (17) の交互方向乗数法による解法

式 (17) の最小解 $\boldsymbol{V}_n^*$ は，任意の $\boldsymbol{V}_{n,0} \in \mathbb{R}^{3(k+1)}$, $\boldsymbol{\Gamma}_{n,0} \in \mathbb{R}^{k(s-1)}$, $\boldsymbol{\Xi}_{n,0} \in \mathbb{R}^{k(s-1)}$ から交互方向乗数法:

$$\left\lfloor \begin{array}{l} \boldsymbol{V}_{n,\iota+1} = (\boldsymbol{L}_n^T \boldsymbol{L}_n)^{-1} \boldsymbol{L}_n^T (\boldsymbol{\Gamma}_{n,\iota} - \boldsymbol{\Xi}_{n,\iota}) \\ \boldsymbol{\Gamma}_{n,\iota+1} = \mathcal{P}_{\kappa,\boldsymbol{\Omega}_n}(\boldsymbol{L}_n \boldsymbol{V}_{n,\iota+1} + \boldsymbol{\Xi}_{n,\iota}) \\ \boldsymbol{\Xi}_{n,\iota+1} = \boldsymbol{\Xi}_{n,\iota} + \boldsymbol{L}_n \boldsymbol{V}_{n,\iota+1} - \boldsymbol{\Gamma}_{n,\iota+1} \end{array} \right.$$

により得られる $(\boldsymbol{V}_{n,\iota})_{\iota=0}^{\infty}$ の極限として近似計算される．ただし，$\kappa > 0$ であり，$\boldsymbol{\Omega}_n =: (\Omega_{n,1}, \Omega_{n,2}, \ldots, \Omega_{n,k(s-1)})^T$ とすると，写像 $\mathcal{P}_{\kappa,\boldsymbol{\Omega}_n} : \mathbb{R}^{k(s-1)} \to \mathbb{R}^{k(s-1)}$ は，凸関数[8] $\kappa H_\mu(\eta - \cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ の近接写像 (proximity operator)[9]:

$$\mathrm{prox}_{\kappa H_\mu(\eta - \cdot)} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \zeta \mapsto \zeta - \frac{\kappa(\zeta - \eta)}{\max\{|\zeta - \eta|, \kappa + \mu\}}$$

を用いて，

$$\mathcal{P}_{\kappa,\boldsymbol{\Omega}_n} : \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \vdots \\ \zeta_{k(s-1)} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \mathrm{prox}_{\kappa H_\mu(\Omega_{n,1} - \cdot)}(\zeta_1) \\ \mathrm{prox}_{\kappa H_\mu(\Omega_{n,2} - \cdot)}(\zeta_2) \\ \vdots \\ \mathrm{prox}_{\kappa H_\mu(\Omega_{n,k(s-1)} - \cdot)}(\zeta_{k(s-1)}) \end{pmatrix}$$

と定義される．

B　凸最適化問題 (19) の交互方向乗数法による解法

式 (19) の最小解 $\boldsymbol{v}_n^*(t)$ は，任意の $\boldsymbol{v}_{n,0}(t) \in \mathbb{R}^3$, $\gamma_{n,0}(t) \in \mathbb{R}^{s-1}$, $\boldsymbol{\xi}_{n,0}(t) \in \mathbb{R}^{s-1}$ から，交互方向乗数法:

$$\left\lfloor \begin{array}{l} \boldsymbol{v}_{n,\iota+1}(t) = (\boldsymbol{l}_n^T(t) \boldsymbol{l}_n(t))^{-1} \boldsymbol{l}_n^T(t)(\gamma_{n,\iota}(t) - \boldsymbol{\xi}_{n,\iota}(t)) \\ \gamma_{n,\iota+1}(t) = \mathcal{P}_{\kappa,\boldsymbol{\omega}_n(t)}(\boldsymbol{l}_n(t)\boldsymbol{v}_{n,\iota+1}(t) + \boldsymbol{\xi}_{n,\iota}(t)) \\ \boldsymbol{\xi}_{n,\iota+1}(t) = \boldsymbol{\xi}_{n,\iota}(t) + \boldsymbol{l}_n(t)\boldsymbol{v}_{n,\iota+1}(t) - \gamma_{n,\iota+1}(t) \end{array} \right.$$

により得られる $(\boldsymbol{v}_{n,\iota}(t))_{\iota=0}^{\infty}$ の極限として近似計算される．ただし，$\boldsymbol{\omega}_n(t) =: (\omega_{n,1}(t), \omega_{n,2}(t), \ldots, \omega_{n,s-1}(t))^T$ とすると，写像 $\mathcal{P}_{\kappa,\boldsymbol{\omega}_n(t)} : \mathbb{R}^{s-1} \to \mathbb{R}^{s-1}$ は

$$\mathcal{P}_{\kappa,\boldsymbol{\omega}_n(t)} : \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \vdots \\ \zeta_{s-1} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \mathrm{prox}_{\kappa H_\mu(\omega_{n,1}(t) - \cdot)}(\zeta_1) \\ \mathrm{prox}_{\kappa H_\mu(\omega_{n,2}(t) - \cdot)}(\zeta_2) \\ \vdots \\ \mathrm{prox}_{\kappa H_\mu(\omega_{n,s-1}(t) - \cdot)}(\zeta_{s-1}) \end{pmatrix}$$

と定義される．

[8] Huber 損失関数 $H_\mu(\cdot)$ を κ 倍し $\eta \in \mathbb{R}$ だけシフトした凸関数である．

[9] 下半連続な真凸関数 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ の近接写像は $\mathrm{prox}_f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n : \boldsymbol{x} \mapsto \mathrm{argmin}_{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n} f(\boldsymbol{y}) + \frac{1}{2}\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|^2$ と定義される．

参考文献

[1] B. Hofmann-Wellenhof, H. Lichtenegger, and E. Wasle, *GNSS—Global Navigation Satellite Systems: GPS, GLONASS, Galileo, and more*. New York, NY: Springer, 2007.

[2] P. Misra and P. Enge, *Global Positioning System: Signals, Measurements and Performance*, 2nd ed. Lincoln, MA: Ganga-Jamuna Press, 2010.

[3] B. Hofmann-Wellenhof, H. Lichtenegger, and J. Collins, *Global Positioning System: Theory and Practice*, 5th ed. New York, NY: Springer, 2013.

[4] W. Rahiman and Z. Zainal, “An overview of development GPS navigation for autonomous car,” in *Proc. IEEE Conf. Ind. Electron. Appl. (ICIEA)*, 2013, pp 1112–1118.

[5] S. Kamijo, Y. Gu, and L. T. Hsu, “Autonomous vehicle technologies: Localization and mapping,” *IEICE Fundamentals Review*, vol. 9, no. 2, pp. 131–141, 2015.

[6] C. Squarzoni, C. Delacourt, and P. Allemand, “Differential single-frequency GPS monitoring of the La Valette landslide (French Alps),” *Eng. Geol.*, vol. 79, no. 3–4, pp. 215–229, 2005.

[7] J. C. Herrera, D. B. Work, R. Herring, X. J. Ban, Q. Jacobson, and A. M. Bayen, “Evaluation of traffic data obtained via GPS-enabled mobile phones: The Mobile Century field experiment,” *Transportation Research Part C: Emerging Technologies*, vol. 18, no. 4, pp. 568–583, 2010.

[8] D. W. Ryoo and C. Bae, “Design of the wearable gadgets for life-log services based on UTC,” *IEEE Trans. Consum. Electron.*, vol. 53, no. 4, pp.1477–1482, 2007.

[9] P. J. G. Teunissen, “The least-squares ambiguity decorrelation adjustment: A method for fast GPS integer ambiguity estimation,” *Journal of Geodesy*, vol. 70, no. 1–2, pp. 65–82, 1995.

[10] D. Kim and R. B. Langley, “A search space optimization technique for improving ambiguity resolution and computational efficiency,” *Earth Planets Space*, vol. 52, pp. 807–812, 2000.

[11] B. W. Remondi, “Global positioning system carrier phase: Description and use,” *Bulletin géodésique*, vol. 59, no. 4, pp. 361–377, 1985.

[12] P. J. Huber, “Robust estimation of a location parameter,” *Ann. Math. Stat.*, vol. 35, no. 1, pp. 73–101, 1964.

[13] D. Odijk, *Fast Precise GPS Positioning in the Presence of Ionospheric Delays*, ser. Publications on Geodesy. Delft, The Netherlands: Netherlands Geodetic Commission, 2002, vol. 52.

[14] D. Gabay and B. Mercier, “A dual algorithm for the solution of nonlinear variational problems via finite element approximation,” *Comput. Math. Appl.*, vol. 2, no. 1, pp. 17–40, 1976.