フェーズドアレイレーダにおける
隣接仰角間の類似性を利用した気象パラメータ推定
Weather Parameter Estimation Using the Similarity in Adjacent Elevation Angles for Phased Array Radar

北原 大地 † 森川 侑奈 † 平林 晃 † 吉川 栄一 ‡ 菊池 博史 ♯ 牛尾 知雄 ∗
† 立命館大学 情報理工学部 ‡ 宇宙航空研究開発機構 航空技術部門
♯ 電気通信大学 宇宙・電磁環境研究センター ∗ 首都大学東京 航空宇宙システム工学域

Daichi KITAHARA† Yuna MORIKAWA† Akira HIRABAYASHI†
Eiichi YOSHIKAWA‡ Hiroshi KIKUCHI♯ Tomoo USHIO∗

† College of Information Science and Engineering, Ritsumeikan University
‡ Aeronautical Technology Directorate, Japan Aerospace Exploration Agency
♯ Center for Space Science and Radio Engineering, The University of Electro-Communications
∗ Department of Aeronautics and Astronautics, Tokyo Metropolitan University

1 はじめに

局所的集中豪雨の発生頻度は最近 20 年で有意に増加傾向にあり，被害も甚大なものとなっている [1]．この深刻な気象現象の原因は積乱雲であり，高さが 10 キロメートルを超えることもある．一方で，発生から消滅までは 10 分から 30 分程度と，短時間で状態が大きく移り変わる現象である．従来のドップラー気象レーダでは，特定の約 10 から 20 の仰角方向にのみペンシルビームを送信し，対象仰角の気象状態を観測する．全方位を観測するためには，アンテナの向きを変えながら観測仰角数と同じ回数アンテナを回転させる必要があり，5 分から 10 分程度の時間がかかってしまう [2]．したがって，局所的集中豪雨を観測するには，時間・空間分解能が不十分であった．

時間・空間分解能向上のためにフェーズドアレイ気象レーダ (Phased Array Weather Radar: PAWR) が開発された [3]．PAWR ではフェーズドアレイ技術とビームフォーミング技術を併用している．フェーズドアレイ技術によりアンテナの向きを変えることなく瞬時にビームの送信方向を変えることができ，上空の散乱信号をまとめて一度に受信する．そして，受信した混合信号からビームフォーミング技術 [4]–[7] により各仰角の散乱信号を抽出する．これによりアンテナを 1 回転させるだけで全天の観測が可能となり，観測時間が 10 秒から 30 秒程度と大幅に短縮された．

各仰角の散乱信号から推定する気象パラメータは平均電力密度，平均ドップラー周波数，周波数幅の 3 種類であり，それぞれ降水量，平均風速，風速の分散と対応する．PAWR により各パラメータが時間的・空間的に高分解能で得られるようになったが，推定精度に関してはドップラー気象レーダよりも劣ってしまう．これは，ビームフォーミングで抽出された散乱信号が誤差を多く含むためである．また，送信パルス数を制限することも精度劣化の原因となる．

本論文では PAWR でもドップラーレーダと同精度の気象観測を可能にするために，ドップラーレーダにおける高精度なパラメータ推定法 [8], [9] を PAWR に応用する．文献 [8], [9] では散乱信号の離散フーリエ係数の振幅の二乗 (離散ピリオドグラムと呼ばれる) を混合密度関数でモデル化し，最尤推定法により各パラメータを高精度に推定した．ドップラーレーダの場合と違い，PAWR では隣接仰角それぞれに対して低精度のピリオドグラムを得ることができる．提案法ではこれら隣接仰角の観測と，隣接仰角間の気象パラメータの類似性を利用して，最大事後確率推定により全仰角のパラメータをまとめて求める．事後確率の最大化は EM アルゴリズムを用いて行われる．実際の PAWR データを模倣したシミュレーションで，非線形ビームフォーミング [7] と提案法の組み合わせが，非常に高精度な推定結果をもたらすことを示す．

2 ドップラーレーダによる気象観測

2.1 観測モデル

従来のドップラー気象レーダは，特定の仰角方向にペンシルビームを送信し，送信信号と対象物体 (雲や雨滴) の衝突によって生じた散乱信号を

$$\widehat{x}_l := x_l + \varepsilon_l := x(lT + \tfrac{2r}{c}) + \varepsilon_l \quad (l = 0, 1, \ldots, L-1) \tag{1}$$

のように受信する．ここで，T [s] はパルス繰り返し時間，r [m] は対象物体までの距離，c [m/s] は光速であり，$\widehat{x}_l \in \mathbb{C}$ は第 l 番目の観測値，$x_l \in \mathbb{C}$ は時刻 lT に送信したパルスによって生じた散乱信号 $x(t)$ の標本値，$\varepsilon_l \in \mathbb{C}$ は散乱信号と独立な $\forall l\; E[|\varepsilon_l|^2] = N$ を満たす白色雑音である．また，$E[\cdot]$ は期待値を表す．

散乱信号 $x(t)$ は時間的にゆらいでいる不規則信号 (確率過程 $X(t)$ の 1 つの見本過程) であり，x_l の値も確率変数の実現値となる．一般に，散乱信号 $x(t)$ は弱定常[1]かつエルゴード的[2] であることが知られている．更に，散乱信号の平均値は $E[X(t)] = 0$ で，自己相関関数 $R_X(\tau) = E[X(t+\tau)\overline{X(t)}]$ の振幅は τ が大きくなると急激に減少するため，$\int_{-\infty}^{\infty} |\tau R_X(\tau)|\,\mathrm{d}\tau < \infty$ が成り立つ．厳密には，$x(t)$ はパルス幅とビーム幅で決まる散乱体積内の独立な散乱信号の総和であり，

$$x(t) = \sum_s a_s(t) e^{j(2\pi f_s t + \phi_s)} \approx a(t) e^{j(2\pi\mu t + \phi)} \tag{2}$$

と表される [10]–[13]．ここで，$a_s(t) \geq 0$ は第 s 番目の散乱信号の振幅，f_s [Hz] はドップラー周波数，ϕ_s [rad] は見本過程ごとに $[0, 2\pi]$ の一様分布から生成される初期位相であり，$a(t) \geq 0$ は $R_A(\tau) = Pe^{-2\pi^2\sigma^2\tau^2}$ を満たす不規則振幅，μ [Hz] は平均ドップラー周波数，ϕ [rad] はランダムな初期位相である．最右辺の近似では，形状の等しい散乱体がランダムに分布し，f_s の確率密度関数が平均 μ のガウス分布であると仮定している．また，$j \in \mathbb{C}$ は虚数単位，$P := R_X(0)$ は散乱信号の平均電力密度，σ [Hz] は周波数幅である．$x(t)$ の電力スペクトル密度は，自己相関関数を用いて

$$S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau) e^{-j2\pi f\tau}\,\mathrm{d}\tau \approx \frac{P}{\sqrt{2\pi}\sigma}\, e^{-\frac{(f-\mu)^2}{2\sigma^2}} \tag{3}$$

と表される．最右辺の近似には，式 (2) を用いている．ドップラーレーダによる気象観測とは，式 (1) の観測値 $\widehat{x}_l$ から，式 (3) の P, μ, σ を推定することであり，それぞれ降水量，平均風速，風速の分散と対応する．

$x(t)$ は離散的に観測されるため，離散時間信号の電力スペクトル密度を考える．x_l の電力スペクトル密度は，自己相関関数の標本値 $R_X(lT)$ を用いて

$$\begin{aligned} S_\mathrm{d}(f) &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} R_X(lT) e^{-j2\pi f lT} = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} S\left(f - \frac{k}{T}\right) \\ &\approx P\,\frac{e^{\kappa\cos(2\pi fT - \nu)}}{I_0(\kappa)} = 2\pi P V(2\pi fT \,|\, \nu, \kappa) \end{aligned} \tag{4}$$

と表される．ここで，1 行目から 2 行目の近似には，式 (3) と巻き込みガウス分布がフォン・ミーゼス分布 $V(\omega \,|\, \nu, \kappa) := \frac{e^{\kappa\cos(\omega-\nu)}}{2\pi I_0(\kappa)}$ で近似できることを用いた．$\nu := 2\pi\mu T$ [rad] は正規化された平均ドップラー角周波数，$\kappa > 0$ は $1/\sigma^2$ に相当する変数，$I_0(\kappa)$ は 0 次の第一種変形ベッセル関数である．電力スペクトル密度 $S_\mathrm{d}(f)$ の推定には，離散ピリオドグラム

$$h_k := \frac{1}{L}\left|\sum_{l=0}^{L-1} x_l e^{-j\frac{2\pi kl}{L}}\right|^2 \quad (k = 0, 1, \ldots, L-1) \tag{5}$$

を用いる．実際に，離散ピリオドグラムの期待値は

$$\begin{aligned} E[h_k] &= \frac{1}{L}\,E\left[\left(\sum_{l_1=0}^{L-1} x_{l_1} e^{-j\frac{2\pi k l_1}{L}}\right)\left(\sum_{l_2=0}^{L-1} \bar{x}_{l_2} e^{j\frac{2\pi k l_2}{L}}\right)\right] \\ &= \frac{1}{L}\sum_{l_1=0}^{L-1}\sum_{l_2=0}^{L-1} E[x_{l_1}\bar{x}_{l_2}] e^{-j\frac{2\pi k(l_1-l_2)}{L}} \\ &= \frac{1}{L}\sum_{l_1=0}^{L-1}\sum_{l_2=0}^{L-1} R_X\big((l_1-l_2)T\big) e^{-j\frac{2\pi k(l_1-l_2)}{L}} \\ &= \sum_{l=-(L-1)}^{L-1} R_X(lT) e^{-j\frac{2\pi kl}{L}} - \sum_{l=-(L-1)}^{L-1} \frac{|l| R_X(lT)}{L}\, e^{-j\frac{2\pi kl}{L}} \end{aligned} \tag{6}$$

となり，$\sum_{l=-\infty}^{\infty} |l R_X(lT)| < \infty$ であることから，

$$\lim_{L\to\infty} E[h_k] = \sum_{l=-\infty}^{\infty} R_X(lT) e^{-j\frac{2\pi kl}{L}} = S_\mathrm{d}\left(\frac{k}{LT}\right) \tag{7}$$

が成り立つ．また，任意の L に対して，

$$E\left[\frac{1}{L}\sum_{k=0}^{L-1} h_k\right] = E\left[\frac{1}{L}\sum_{l=0}^{L-1} |x_l|^2\right] = P \tag{8}$$

も成り立つ．本論文では，式 (6) の右辺が $S_\mathrm{d}(\frac{k}{LT})$ に似ると考え，離散ピリオドグラムのモデルを

$$E[h_k] = C_L S_\mathrm{d}\left(\frac{k}{LT}\right) = PL\,\frac{V(\omega_k \,|\, \nu, \kappa)}{\sum_{k'=0}^{L-1} V(\omega_{k'} \,|\, \nu, \kappa)} \tag{9}$$

[1] 確率過程 $X(t)$ が，$\forall t\; E[X(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x\,|\,t)\,\mathrm{d}x = \mu_X$ かつ $\forall t\,\forall\tau\; E[X(t+\tau)\overline{X(t)}] = \iint_{-\infty}^{\infty} x_1\bar{x}_2 p(x_1, x_2\,|\,t+\tau, t)\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 = R_X(\tau)$ である (期待値が t に依らない) とき，$X(t)$ は弱定常であるという．ここで，$p(x\,|\,t)$ は $x(t)$ の確率密度関数，$p(x_1, x_2\,|\,t+\tau, t)$ は $x_1 = x(t+\tau)$ と $x_2 = x(t)$ の同時確率密度関数である．

[2] 弱定常過程 $X(t)$ がエルゴード的であるならば，任意の見本過程 $x(t)$ に対して，$\mu_X = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\,\mathrm{d}t$ かつ $R_X(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T x(t+\tau)\overline{x(t)}\,\mathrm{d}t$ が成り立つ．ここで，確率変数の極限は二乗平均の意味で収束することに注意されたい．

と簡略化する．ここで，$C_L := \frac{L}{2\pi\sum_{k'=0}^{L-1} V(\omega_{k'} \,|\, \nu,\kappa)}$，$\omega_k := \frac{2\pi k}{L}$ であり，$\lim_{L\to\infty} C_L = 1$ となる．式 (9) は，式 (4), (7), (8) とは矛盾しないことに注意されたい．

2.2　EM アルゴリズムによるパラメータ推定

式 (5) の離散ピリオドグラムは雑音 ε_l を含まない理想的な値であり，実際は，ε_l を含む観測値 $\widehat{x}_l$ から

$$\widehat{h}_k := \frac{1}{L}\left|\sum_{l=0}^{L-1} \widehat{x}_l e^{-j\frac{2\pi kl}{L}}\right|^2 \quad (k = 0, 1, \ldots, L-1) \tag{10}$$

のように離散ピリオドグラムを計算する．x_l と ε_l は互いに独立で，ε_l は白色雑音であることから

$$E[\widehat{h}_k] = E[h_k] + N = 2\pi C_L P V(\omega_k \,|\, \nu, \kappa) + N$$

が成り立つ．したがって，以下の混合密度モデル

$$E[\widehat{h}_k] \propto \rho V(\omega_k \,|\, \nu, \kappa) + (1-\rho)U(\omega_k) =: g(\omega_k \,|\, \Theta) \tag{11}$$

が得られる (図 1)．ここで，$\rho \in (0, 1)$ は

$$\rho := \frac{C_L P}{C_L P + N} \approx \frac{P}{P+N} \tag{12}$$

と定義され，最右辺の近似は L の値が大きいときに成立する．また，$U(\omega) := \frac{1}{2\pi}$ は $[0, 2\pi]$ 上の一様分布，$\Theta := (\rho, \nu, \kappa)$ は混合密度関数 g のパラメータを表す．式 (12) から，ρ は観測信号 $\widehat{x}_l$ の電力 $P + N$ のうち，気象エコー x_l の電力 P が占める割合を表している．

文献 [8], [9] では，式 (10) の離散ピリオドグラムから，EM アルゴリズムを利用して混合密度関数 g のパラメータ Θ を推定している[3]．式 (11) の関数 g はあくまで $E[\widehat{h}_k]$ のモデルにすぎないが，$\widehat{h}_k$ の値を正規化ドップラー角周波数 w_k の観測回数と見なし，g は $\omega \in [0, 2\pi]$ の確率密度関数であると近似する．これによって，混合確率分布のパラメータ推定問題と同様に，EM アルゴリズムで Θ が推定可能となる．EM アルゴリズムは，対数尤度関数の最大化問題

$$\underset{\Theta}{\text{maximize}} \sum_{k=0}^{L-1} \widehat{h}_k \log\bigl(g(\omega_k \,|\, \Theta)\bigr) \tag{13}$$

を解く手法であり，ある初期値 $\Theta^{(1)}$ から E ステップと M ステップの 2 つを繰り返すことで解を求める．

E ステップでは，現在の推定値 $\Theta^{(i)}$ のもとで得られる潜在変数の事後確率に関して，完全データ対数尤度関数の期待値を計算する．潜在変数の事後確率

[3] 文献 [8], [9] では，散乱信号には，山岳，森林，建築物などからの信号であるグランドクラッタも含まれているとしていた．本論文では，グランドクラッタが存在しない式 (11) のモデルに対して，文献 [8], [9] のアルゴリズムを適用している．

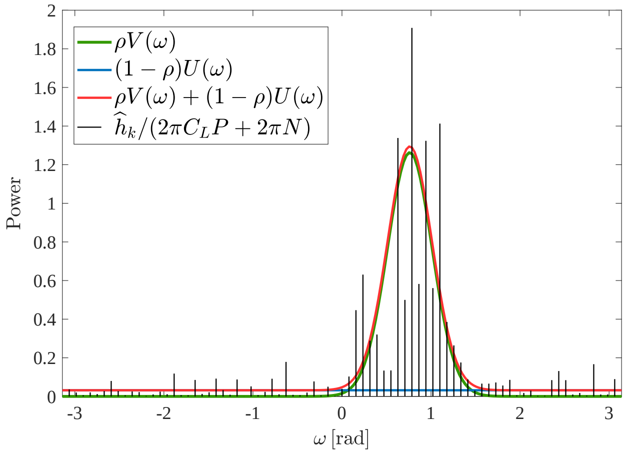

図 1: 離散ピリオドグラム $\widehat{h}_k$ と式 (9) の混合密度関数

は，ベイズの定理を用いて

$$\begin{cases} \alpha_k^{(i)} = \dfrac{\rho^{(i)} V(\omega_k \,|\, \nu^{(i)}, \kappa^{(i)})}{g(\omega_k \,|\, \Theta^{(i)})} \\[2ex] \beta_k^{(i)} = \dfrac{(1-\rho^{(i)})\, U(\omega_k)}{g(\omega_k \,|\, \Theta^{(i)})} \end{cases} \tag{14}$$

と表される．これらの値は，ω_k が気象エコーと雑音それぞれの分布に属する確率を表しており，負担率とも呼ばれる．完全データ対数尤度の期待値は

$$Q^{(i)}(\Theta) = \sum_{k=0}^{L-1} \Bigl[\alpha_k^{(i)} \widehat{h}_k \log\bigl(\rho V(\omega_k \,|\, \nu, \kappa)\bigr) + \beta_k^{(i)} \widehat{h}_k \log\bigl((1-\rho)U(\omega_k)\bigr)\Bigr] \tag{15}$$

のように計算される．

M ステップでは，式 (13) の対数尤度関数の下界でもある式 (15) の期待値 $Q^{(i)}(\Theta)$ を最大化する．具体的には，$Q^{(i)}(\Theta)$ を各変数 ρ, ν, κ で偏微分し，各変数に関して最大値を求めることで Θ を更新する．まず，$\frac{\partial Q^{(i)}}{\partial \rho} = 0$ から

$$\rho^{(i+1)} = \frac{\sum_{k=0}^{L-1} \alpha_k^{(i)} \widehat{h}_k}{\sum_{k=0}^{L-1} (\alpha_k^{(i)} + \beta_k^{(i)}) \widehat{h}_k} \tag{16}$$

と更新する．次に，$\frac{\partial Q^{(i)}}{\partial \nu} = 0$ から

$$\tan \nu^{(i+1)} = \frac{\sum_{k=0}^{L-1} \alpha_k^{(i)} \widehat{h}_k \sin \omega_k}{\sum_{k=0}^{L-1} \alpha_k^{(i)} \widehat{h}_k \cos \omega_k} \tag{17}$$

が成り立つ．この式を満たす $\nu \in [0, 2\pi)$ は 2 つあり，一方は式 (15) を最小に，もう一方は最大にするため，最大値の方を $\nu^{(i+1)}$ とする．最後に，$\frac{\partial Q^{(i)}}{\partial \kappa} = 0$ から

$$\frac{I_1(\kappa^{(i+1)})}{I_0(\kappa^{(i+1)})} = \frac{\sum_{k=0}^{L-1} \alpha_k^{(i)} \widehat{h}_k \cos(\omega_k - \nu^{(i+1)})}{\sum_{k=0}^{L-1} \alpha_k^{(i)} \widehat{h}_k} \tag{18}$$

が成り立つ．この方程式の解は陽に求まらないため，ニュートン法やグリッドサーチなどで解を計算する．式 (14)–(18) を繰り返すことで，式 (13) の問題を解く．

3　フェーズドアレイレーダによる気象観測

3.1　観測モデル

従来のドップラーレーダでは，10 方向程度の仰角に対して，散乱信号をそれぞれ $L = 80$ 回程度観測することで，気象パラメータ P, μ, σ を高精度に推定していた．しかしながら，レーダを中心とする 3 次元の上半球のスキャンに 5 分から 10 分の時間がかかり，仰角標本数も少ないため，近年増加しているゲリラ豪雨等の局所的大雨を観測しきれない．時間的･空間的に高分解能な観測を実現するために，フェーズドアレイ気象レーダが開発された [3]．このレーダは，観測対象の仰角区間全体 $[\theta_{\min}, \theta_{\max}]$ にファンビームを送信し，K 個あるアンテナ素子で散乱信号をそれぞれ $y_{n,l} \in \mathbb{C}$ $(n = 1, 2, \ldots, K)$ と観測する．全仰角区間を M 個の部分区間 $[\theta_m - \frac{\Delta\theta}{2}, \theta_m + \frac{\Delta\theta}{2}]$ に分割し，それぞれの部分区間における散乱信号を $x_{m,l} \in \mathbb{C}$ $(m = 1, 2, \ldots, M)$ とする．ここで，$\Delta\theta := \frac{\theta_{\max}-\theta_{\min}}{M}$ かつ $\theta_m := \theta_{\min} + (m - \frac{1}{2})\Delta\theta$ である．アンテナ素子は直線状に間隔 d [m] で配置されており，送信信号の波長を λ [m]，各素子の観測雑音を $\varepsilon_{n,l} \in \mathbb{C}$ とすれば，

$$\boldsymbol{y}_l = \sum_{m=1}^{M} x_{m,l}\boldsymbol{s}_m + \boldsymbol{\varepsilon}_l = \boldsymbol{S}\boldsymbol{x}_l + \boldsymbol{\varepsilon}_l \quad (l = 0, 1, \ldots, L-1) \tag{19}$$

のように観測信号 $\boldsymbol{y}_l := (y_{1,l}, y_{2,l}, \ldots, y_{K,l})^{\mathrm{T}} \in \mathbb{C}^K$ を表現できる．ここで，ステアリングベクトル $\boldsymbol{s}_m$ は

$$\boldsymbol{s}_m := \left(1, e^{-j\frac{2\pi d \sin\theta_m}{\lambda}}, \ldots, e^{-j\frac{2(K-1)\pi d \sin\theta_m}{\lambda}}\right)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{C}^K$$

で表され，$\boldsymbol{x}_l := (x_{1,l}, x_{2,l}, \ldots, x_{M,l})^{\mathrm{T}} \in \mathbb{C}^M$，$\boldsymbol{\varepsilon}_l := (\varepsilon_{1,l}, \varepsilon_{2,l}, \ldots, \varepsilon_{K,l})^{\mathrm{T}} \in \mathbb{C}^K$，$\boldsymbol{S} := (\boldsymbol{s}_1, \boldsymbol{s}_2, \ldots, \boldsymbol{s}_M) \in \mathbb{C}^{K\times M}$ である．また，$\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{\varepsilon}} := E[\boldsymbol{\varepsilon}_l\boldsymbol{\varepsilon}_l^{\mathrm{H}}] = N\boldsymbol{I}_K$ とする．

式 (19) における $x_{m,l}$ は，式 (1) における x_l に相当する．したがって，フェーズドアレイレーダによる気象観測では，最初にビームフォーミング (詳細は第 3.2 節) を用いて $\boldsymbol{y}_l$ から $\boldsymbol{x}_l$ を推定する．その後，各仰角方向の平均電力密度 P_m，平均ドップラー周波数 f_m，周波数幅 σ_m を推定することで，時間的･空間的に高分解能な気象観測が可能となる．一方で，得られる気象パラメータ P_m, f_m, σ_m の精度に関しては，ドップラーレーダの方が優れている．これは，ビームフォーミングによる推定結果 $\widehat{x}_{m,l}$ が誤差を多く含むためである．また，時間分解能向上のために $L = 20$ 回程度しか観測しないことも精度劣化の原因となる．

3.2　ビームフォーミング

3.2.1　線形ビームフォーミング

ビームフォーミングの中でも，最も基本的な手法である Fourier 法 (以下 FR 法) [4]，サイドローブの寄与を低減する Capon 法 (以下 CP 法) [5]，少数の観測値からでもロバストに推定できる MMSE 法 [6] の 3 つを説明する．これらの手法はいずれも，観測信号 $\boldsymbol{y}_l$ と複素重みベクトル $\boldsymbol{w}_m \in \mathbb{C}^K$ の複素内積の計算

$$\widehat{\boldsymbol{x}}_l := (\boldsymbol{w}_1^{\mathrm{H}}\boldsymbol{y}_l, \boldsymbol{w}_2^{\mathrm{H}}\boldsymbol{y}_l, \ldots, \boldsymbol{w}_M^{\mathrm{H}}\boldsymbol{y}_l)^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{W}\boldsymbol{y}_l \tag{20}$$

により $\boldsymbol{x}_l$ の推定を行う，$\boldsymbol{y}_l$ に関して線形なビームフォーミングである．FR 法の複素重みベクトルは

$$\boldsymbol{w}_{\mathrm{FR},m} := \frac{\boldsymbol{s}_m}{K} \tag{21}$$

と表される．FR 法は高速ではあるが，サイドローブで他方向の信号も同時に受信してしまう欠点がある．

CP 法では，対象仰角にメインローブを向けながら受信電力を最小化する複素重みベクトル

$$\boldsymbol{w}_{\mathrm{CP},m} := \frac{\widehat{\boldsymbol{R}}_{\boldsymbol{y}}^{-1}\boldsymbol{s}_m}{\boldsymbol{s}_m^{\mathrm{H}}\widehat{\boldsymbol{R}}_{\boldsymbol{y}}^{-1}\boldsymbol{s}_m} \tag{22}$$

を適応的に求める．ここで，$\widehat{\boldsymbol{R}}_{\boldsymbol{y}} := \frac{1}{L}\sum_{l=0}^{L-1}\boldsymbol{y}_l\boldsymbol{y}_l^{\mathrm{H}}$ である．CP 法は，観測数 L が十分大きいとき，他方向の信号を良好に抑圧できる．しかし，L が小さくなるにつれて電力が過少に推定され，$\widehat{\boldsymbol{R}}_{\boldsymbol{y}}$ の逆行列も定義できなくなる．MMSE 法では，複素重みベクトルを

$$\left|\begin{aligned} \boldsymbol{R}_{\boldsymbol{x}}^{(i)} &= \left(\frac{1}{L}\sum_{l=0}^{L-1}\widehat{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{MMSE},l}^{(i)}\widehat{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{MMSE},l}^{(i)\mathrm{H}}\right) \odot \boldsymbol{I}_M \\ \boldsymbol{R}_{\boldsymbol{y}}^{(i)} &= \boldsymbol{S}\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{x}}^{(i)}\boldsymbol{S}^{\mathrm{H}} + N\boldsymbol{I}_K \\ \boldsymbol{w}_{\mathrm{MMSE},m}^{(i+1)} &= \frac{\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{y}}^{(i)-1}\boldsymbol{s}_m}{\boldsymbol{s}_m^{\mathrm{H}}\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{y}}^{(i)-1}\boldsymbol{s}_m} \quad (m = 1, 2, \ldots, M) \\ \widehat{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{MMSE},l}^{(i+1)} &= \boldsymbol{W}_{\mathrm{MMSE}}^{(i+1)}\boldsymbol{y}_l \quad (l = 0, 1, \ldots, L-1) \end{aligned}\right. \tag{23}$$

のように求める．ここで，$\odot$ はアダマール積，$\boldsymbol{I}_M$ は $M \times M$ の単位行列である．CP 法と異なり $\widehat{\boldsymbol{R}}_{\boldsymbol{y}}$ を計算しないため，小さな L でもロバストに推定を行える．

3.2.2　非線形ビームフォーミング

筆者らは仰角分解能向上のために，凸最適化問題

$$\underset{\boldsymbol{X}}{\text{minimize}}\ \frac{1}{2}\|\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{S}\boldsymbol{X}\|_{\mathrm{F}}^2 + \xi_1\|\boldsymbol{X}\|_1^{G_1} + \xi_2\|\boldsymbol{B}\boldsymbol{F}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\|_1^{G_2} \tag{24}$$

を解くことで $\boldsymbol{Y} := (\boldsymbol{y}_0, \boldsymbol{y}_1, \ldots, \boldsymbol{y}_{L-1}) \in \mathbb{C}^{K\times L}$ から $\boldsymbol{X} := (\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_{L-1}) \in \mathbb{C}^{M\times L}$ を推定するビームフォーミングを提案した [7]．ここで，$\xi_1, \xi_2 > 0$ は各

項の重み，$\boldsymbol{F} \in \mathbb{C}^{L\times L}$ はフーリエ変換，$\boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{bL\times L}$ はサイズ b のブロック抽出行列，$\|\cdot\|_1^G$ はグループ ℓ_1 ノルムである．推定結果 $\widehat{\boldsymbol{X}}$ は ADMM [14] を用いて計算され，式 (20) では表せない非線形な手法 (以下 NL 法) となり，散乱信号 $x_{m,l}$ を高精度に推定できる．

4 隣接仰角間の類似性を利用したパラメータ推定

ビームフォーミングによって得られた散乱信号の推定値 $\widehat{x}_{m,l}$ $(l=0,1,\ldots,L-1)$ から，式 (10) と同様に離散ピリオドグラム $\widehat{h}_{m,k}$ $(k=0,1,\ldots,L-1)$ を計算できる．したがって，仰角毎に第 2.2 節の手法を適用すれば，各仰角の混合密度関数 g のパラメータ $\Theta_m := (\rho_m, \nu_m, \kappa_m)$ が推定される．しかしながら，ビームフォーミング結果 $\widehat{x}_{m,l}$ に含まれる残存誤差と観測回数 L の少なさに起因して，パラメータの推定精度はドップラーレーダと比べて低下してしまう．

本論文では，フェーズドアレイレーダでドップラーレーダと同精度の気象観測を行うために，全仰角のパラメータ $\boldsymbol{\Theta} := (\Theta_1, \Theta_2, \ldots, \Theta_M)$ をまとめて推定する手法を提案する．ドップラーレーダでの観測と異なり，フェーズドアレイレーダでは連続する仰角区間 $[\theta_m - \frac{\Delta\theta}{2}, \theta_m + \frac{\Delta\theta}{2}]$ それぞれに対してピリオドグラム $\widehat{h}_{m,k}$ を取得できる．隣接仰角間では，平均電力密度 P_m，平均ドップラー周波数 μ_m，周波数幅 σ_m は類似すると考えられ，この性質を $\boldsymbol{\Theta}$ の事前分布によって表現する．提案法は，最大事後確率 (MAP) 推定

$$\underset{\boldsymbol{\Theta}}{\text{maximize}} \sum_{m=1}^{M}\sum_{k=0}^{L-1} \widehat{h}_{m,k} \log\bigl(g(\omega_k \mid \Theta_m)\bigr) - \Psi(\boldsymbol{\Theta}) \tag{25}$$

により $\boldsymbol{\Theta}$ を高精度かつロバストに計算する．ここで，Ψ は $\boldsymbol{\Theta}$ の対数事前分布を -1 倍した関数に相当し，

$$\Psi(\boldsymbol{\Theta}) := \sum_{m=1}^{M-1}\Biggl[\frac{\zeta_1}{2}(\rho_{m+1}\widehat{P}_{m+1} - \rho_m\widehat{P}_m)^2 - \zeta_2\cos(\nu_{m+1}-\nu_m) + \frac{\zeta_3}{2}(\kappa_{m+1}-\kappa_m)^2\Biggr] \tag{26}$$

と定義される．ただし，$\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3 > 0$ は各項の重み，$\widehat{P}_m := \frac{1}{L}\sum_{l=0}^{L-1} |\widehat{x}_{m,l}|^2$ は雑音を含む電力 $P_m + N$ の推定値，$\rho_m\widehat{P}_m$ は式 (12) から P_m の推定値である．

式 (25) の最大化問題を EM アルゴリズムによって解く．E ステップでは，現在の推定値 $\Theta_m^{(i)}$ のもとで完全データ対数尤度関数の期待値を計算し，下界関数

$$Q^{(i)}(\boldsymbol{\Theta}) = \sum_{m=1}^{M}\sum_{k=0}^{L-1}\Bigl[\alpha_{m,k}^{(i)}\widehat{h}_{m,k}\log\bigl(\rho_m V(\omega_k \mid \nu_m, \kappa_m)\bigr) + \beta_{m,k}^{(i)}\widehat{h}_{m,k}\log\bigl((1-\rho_m)U(\omega_k)\bigr)\Bigr] - \Psi(\boldsymbol{\Theta}) \tag{27}$$

を設計する．ここで，$\alpha_{m,k}^{(i)}$ と $\beta_{m,k}^{(i)}$ は式 (14) の $\rho^{(i)}$, $\nu^{(i)}$, $\kappa^{(i)}$ を $\rho_m^{(i)}$, $\nu_m^{(i)}$, $\kappa_m^{(i)}$ に置き換えて得られる負担率である．M ステップでは，$Q^{(i)}(\boldsymbol{\Theta})$ を最大にするパラメータを求める．まず $\frac{\partial Q^{(i)}}{\partial \rho_m} = 0$ から，$\rho_m^{(i+1)}$ は

$$2\zeta_1\widehat{P}_m^2\rho_m^{(i+1)3} - \zeta_1\widehat{P}_m(2\widehat{P}_m + \widetilde{P}_{m+1}^{(i)} + \widetilde{P}_{m-1}^{(i)})\rho_m^{(i+1)2} + \Biggl[\zeta_1\widehat{P}_m(\widetilde{P}_{m+1}^{(i)} + \widetilde{P}_{m-1}^{(i)}) - \sum_{k=0}^{L-1}(\alpha_{m,k}^{(i)} + \beta_{m,k}^{(i)})\widehat{h}_{m,k}\Biggr]\rho_m^{(i+1)} + \sum_{k=0}^{L-1}\alpha_{m,k}^{(i)}\widehat{h}_{m,k} = 0 \tag{28}$$

を満たす．ただし，$\widetilde{P}_{m\pm1}^{(i)} := \rho_{m\pm1}^{(i)}\widehat{P}_{m\pm1}$ である．これは $\rho_m \in (0,1)$ に関する 3 次方程式であるので，解は最大 3 つ存在する．その中で式 (27) の関数値を最も大きくする解に更新する．次に，$\frac{\partial Q^{(i)}}{\partial \nu_m} = 0$ から

$$\tan\nu_m^{(i+1)} = \frac{\sum_{k=0}^{L-1}\alpha_{m,k}^{(i)}\widehat{h}_{m,k}\sin\omega_k - \zeta_2(\sin\nu_{m+1}^{(i)} + \sin\nu_{m-1}^{(i)})}{\sum_{k=0}^{L-1}\alpha_{m,k}^{(i)}\widehat{h}_{m,k}\cos\omega_k - \zeta_2(\cos\nu_{m+1}^{(i)} + \cos\nu_{m-1}^{(i)})} \tag{29}$$

が成り立つ．この式を満たす $\nu_m \in [0, 2\pi)$ は 2 つあり，一方は式 (27) を最小に，もう一方は最大にするため，最大値の方を $\nu_m^{(i+1)}$ とする．最後に，$\frac{\partial Q^{(i)}}{\partial \kappa_m} = 0$ から

$$\frac{I_1(\kappa_m^{(i+1)})}{I_0(\kappa_m^{(i+1)})} + \frac{\zeta_3(2\kappa_m^{(i+1)} - \kappa_{m+1}^{(i)} - \kappa_{m-1}^{(i)})}{\sum_{k=0}^{L-1}\alpha_{m,k}^{(i)}\widehat{h}_{m,k}} = \frac{\sum_{k=0}^{L-1}\alpha_{m,k}^{(i)}\widehat{h}_{m,k}\cos(\omega_k - \nu_m^{(i+1)})}{\sum_{k=0}^{L-1}\alpha_{m,k}^{(i)}\widehat{h}_{m,k}} \tag{30}$$

が成り立つ．この方程式の解は陽に求まらないため，ニュートン法やグリッドサーチなどで解を計算する．更新する仰角 θ_m をランダムに選びながら，式 (28)–(30) を繰り返すことで，式 (25) の問題を解く．また，$\zeta_1 = \zeta_2 = \zeta_3 = 0$ とすれば，式 (28), (29), (30) はそれぞれ，従来法の更新式 (16), (17), (18) と一致する．

5 数値シミュレーション

実データを模倣した数値シミュレーションにより提案法の有効性を示す．大阪大学吹田キャンパスに設置された PAWR で 2014 年 3 月 30 日に観測されたデータを用いた．このデータの第 30 番目の方位角の距離 $r = 7.5\,[\mathrm{km}]$ 地点において，$\theta_{\min} = -15\,[\mathrm{deg}]$ から $\theta_{\max} = 30\,[\mathrm{deg}]$ の 55 個のレーダ反射因子を 3 次スプライン補間して小さな雑音を加えることで，$M = 110$ 個の真の平均信号電力密度 P_m を作成した．真の ν_m と κ_m は正弦波に定数と小さな雑音を加える

ことで作成した．散乱信号 $x_{m,l}$ は周波数領域で作成され，式 (9) を満足する複素ガウス分布から各離散フーリエ係数を独立に生成した．PAWR の各設定は，アンテナ素子数 $K = 128$，パルス数 $L = 20$，波長 $\lambda = 0.0318\,[\mathrm{m}]$，素子間 $d = 0.0165\,[\mathrm{m}]$，パルス繰り返し時間 $T = 0.0004\,[\mathrm{s}]$ とした．雑音電力 N は信号電力 P_m の最小値の半分とした．ビームフォーミングには，$L < K$ で CP 法 (式 (22)) は使用不可能なため，FR 法 (式 (21))，MMSE 法 (式 (23))，NL 法 (式 (24)) の 3 種類を用いた．NL 法の各パラメータは，$q = 5$，$b = 3$，$\xi_1 = 0.0025\frac{K\sqrt{qL}}{M}$，$\xi_2 = 0.25\frac{K}{M\sqrt{b}}$ とした [7]．

ドップラーレーダで $L = 20$ 回ペンシルビームを送信した後に従来法を用いた結果，PAWR でビームフォーミングした後に従来法を用いた結果，PAWR でビームフォーミングした後に提案法を用いた結果を比較する．提案法では式 (26) の重みを，$\zeta_1 = 2.0\times10^{-10}$，$\zeta_2 = 3.5\times10^{-3}$，$\zeta_3 = 4.5\times10^{-2}$ と設定した．表 1 は，各推定値の正規化誤差 $\frac{100\sum_{m=1}^{M}(\widehat{\rho}_m\widehat{P}_m-P_m)^2}{\sum_{m=1}^{M}P_m^2}$，$\frac{100\sum_{m=1}^{M}(\widehat{\nu}_m-\nu_m)^2}{\sum_{m=1}^{M}\nu_m^2}$，$\frac{100\sum_{m=1}^{M}(\widehat{\kappa}_m-\kappa_m)^2}{\sum_{m=1}^{M}\kappa_m^2}$ を表している．パルス数が少ないためドップラーレーダの場合でも高精度な推定は難しく，特に周波数幅の逆数に相当する κ_m の推定精度は極めて低い．PAWR でビームフォーミング後に従来法を用いた場合には，各仰角の離散ピリオドグラムの精度が下がるため，P_m, ν_m, κ_m の推定精度も下がる．一方，ビームフォーミング後に提案法を用いた場合には，ν_m と κ_m の推定精度が大きく向上し，特にビームフォーミングに NL 法を用いたときが最も高精度にパラメータを推定できた．

表 1: パルス数 $L = 20$ における正規化誤差

	P_m	ν_m	κ_m
ペンシルビーム	43.18	19.02	1249.50
FR + 従来法	62.53	33.86	1565.54
FR + 提案法	64.04	30.63	44.92
MMSE + 従来法	47.69	17.80	1363.20
MMSE + 提案法	47.55	15.85	39.50
NL + 従来法	44.35	20.42	1364.05
NL + 提案法	**43.58**	**12.21**	**24.00**

6 おわりに

本論文では，フェーズドアレイレーダによる気象観測に対して，隣接仰角間の類似性に基づく高精度なパラメータ推定法を提案した．ビームフォーミングで得られる離散ピリオドグラムは低精度であるため，従来法をそのまま適用すると気象パラメータの推定精度も劣化してしまう．提案法では，隣接仰角間の類似性を事前分布で表現し MAP 推定を行うことで，少ないパルスでも非常に高精度な推定を実現した．

参考文献

[1] Committee on Extreme Weather Events and Climate Change Attribution, *Attribution of Extreme Weather Events in the Context of Climate Change*. Washington D.C., The National Academy Press, 2016.

[2] M. Wada, J. Horikomi, and F. Mizutani, “Development of solid-state weather radar,” in *Proc. IEEE Radar Conf.*, 2009, 4 pages.

[3] F. Mizutani, T. Ushio, E. Yoshikawa, S. Shimamura, H. Kikuchi, M. Wada, S. Satoh, and T. Iguchi, “Fast-scanning phased-array weather radar with angular imaging technique,” *IEEE Trans. Geosci. Remote Sens.*, vol. 56, no. 5, pp. 2664–2673, May 2018.

[4] E. Kudeki and F. Sürücü, “Radar interferometric imaging of field-aligned plasma irregularities in the equatorial electrojet,” *Geophys. Res. Lett.*, vol. 18, no. 1, pp. 41–44, 1991.

[5] J. Capon, “High-resolution frequency-wavenumber spectrum analysis,” *Proc. IEEE*, vol. 57, no. 8, pp. 1408–1418, 1969.

[6] E. Yoshikawa, T. Ushio, Z. Kawasaki, S. Yoshida, T. Morimoto, F. Mizutani, and M. Wada, “MMSE beam forming on fast-scanning phased array weather radar,” *IEEE Trans. Geosci. Remote Sens.*, vol. 51, no. 5, pp. 3077–3088, 2013.

[7] D. Kitahara, M. Nakahara, A. Hirabayashi, E. Yoshikawa, H. Kikuchi, and T. Ushio, “Nonlinear beamforming via convex optimization for phased array weather radar,” in *Proc. Asia-Pac. Signal Inf. Process. Assoc. Annual Summit Conf. (APSIPA ASC)*, 2018, pp. 1831–1835.

[8] S. Kon, T. Tanaka, H. Mizutani, and M. Wada, “A machine learning based approach to weather parameter estimation in Doppler weather radar,” in *Proc. IEEE Int. Conf. Acoust. Speech Signal Process. (ICASSP)*, 2011, pp. 2152–2155.

[9] 根 智志, 田中 聡久, “ロバストな混合モデルによるドップラー気象レーダの気象データ推定,” 電子情報通信学会技術研究報告, 2011, vol. 111, no. 104, pp. 79-84.

[10] V. N. Bringi and V. Chandrasekar, *Polarimetric Doppler Weather Radar: Principles and Applications*. Cambridge University Press, 2001.

[11] 関根 松夫, レーダ信号処理技術. 電子情報通信学会, 1991.

[12] 吉野 文雄, レーダ水文学. 森北出版, 2002.

[13] 深尾 昌一郎, 浜津 享助, 気象と大気のレーダーリモートセンシング. 京都大学学術出版会, 2005.

[14] D. Gabay and B. Mercier, “A dual algorithm for the solution of nonlinear variational problems via finite element approximation,” *Comput. Math. Appl.*, vol. 2, no. 1, pp. 17–40, 1976.