

## 2種類の辞書とBCCB行列の対角化を利用したMR画像再構成

中本 和磨<sup>†</sup> 藤井 皓介<sup>†</sup> 北原 大地<sup>†</sup> 平林 晃<sup>†</sup>

<sup>†</sup> 立命館大学情報理工学部 〒525-8577 滋賀県草津市野路東1-1-1

E-mail: <sup>†</sup> d-kita@fc.ritsumei.ac.jp, akirahrb@media.ritsumei.ac.jp

あらまし 高速撮像MRIにおいて、適応直交辞書と事前冗長辞書という2種類の辞書を用いる高精度な画像再構成手法を提案する。提案手法では、適応辞書に直交性を課すことで対象画像の位相を含む低周波成分を高速に学習する。一方、事前辞書には冗長性を持たせ、振幅画像のみの高周波成分を強調して学習させることで、微細構造の高精度再構成を実現する。更に、画像更新の際に現れる行列がBCCB構造を有することを示し、フーリエ変換によるBCCB行列の対角化を利用して再構成時間を短縮する。実データを用いたシミュレーションにより提案法の有効性を示す。

キーワード 高速撮像MRI, 画像再構成, 辞書学習, 圧縮センシング

## MR Image Reconstruction Using Two Types of Dictionaries and the Diagonalization of a BCCB Matrix

Kazuma NAKAMOTO<sup>†</sup>, Kosuke FUJII<sup>†</sup>, Daichi KITAHARA<sup>†</sup>, and Akira HIRABAYASHI<sup>†</sup>

<sup>†</sup> College of Information Science and Engineering, Ritsumeikan University

1-1-1 Nojihigashi, Kusatsu, Shiga, 525-8577 Japan

E-mail: <sup>†</sup> d-kita@fc.ritsumei.ac.jp, akirahrb@media.ritsumei.ac.jp

**Abstract** We propose a high-quality MR image reconstruction method using both of an adaptive orthogonal dictionary and a pre-trained redundant dictionary. The adaptive dictionary exploits the orthogonality to accelerate the reconstruction speed, and the pre-trained dictionary adopts the redundancy to precisely reconstruct high-frequency components of the magnitude image. The image reconstruction process is further accelerated by using the so-called BCCB (Block Circulant with Circulant Blocks) structure of a matrix, which appears in the process. Simulations using real data demonstrate the effectiveness of the proposed method by comparison to conventional methods.

**Key words** High-Speed MRI, Image Reconstruction, Dictionary Learning, Compressed Sensing

### 1. はじめに

磁気共鳴画像法 (Magnetic Resonance Imaging: MRI) [1] は強力な磁力を用いて生体の内部構造を撮像する医療機器である。コンピュータ断層撮影法 (Computed Tomography: CT) [2] と比較して X 線を被曝しないという利点がある一方で、撮像時間が長いという欠点がある。また、MRI 装置内は狭く、撮像中には MRI 騒音と呼ばれる非常に大きな音も発生するため、患者の負担軽減の観点から撮像時間の短縮が求められている。

MRI はデータを一括ではなく時間軸上で順次取得するため、撮像時間が取得データ数にほぼ比例する。したがって、取得データ数を減らせば撮像時間を短縮できる。削減したデータに対して通常の画像再構成手法である逆フーリエ変換を適用すると、画像全体が不鮮明になり、折り返しパターンなどのアーチファクトも発生してしまう。この問題を解決するために、圧縮

センシング (Compressed Sensing: CS) に基づいた再構成手法が提案されてきた [3-7]。圧縮センシング [8] とは、対象信号が適切な空間においてはスパースに表現されることを利用し、少数の観測信号から対象信号を高精度に復元する技術である。Lustig らは、圧縮センシング MRI (CSMRI) と呼ばれる高速 MR 撮像法を提案した [3]。この手法では、「観測信号との整合性」、「離散ウェーブレット変換後のスパース性」、及び「隣接画素間の類似性」を考慮した評価関数を定義し、その値を最小にする MR 画像を再構成する。この方法は、圧縮率が 1/3 程度までの場合には、MR 画像を高精度に再構成できる。しかし、ウェーブレット変換という固定された変換を用いるため、より高圧縮な観測信号に対しては再構成精度が著しく低下する。

更なる精度向上のために、パッチベースの辞書学習を用いる再構成手法が開発されてきた [4-7]。辞書学習 [9-11] とは対象信号をスパースに表現する行列を生成する技術であり、少数の

列ベクトルの線形結合によって対象信号を高精度に近似できるようになる。Chen らは、時間をかけて撮像した高品質な MR 画像のパッチを学習データに用いて辞書を事前に作成し、この事前辞書によるスパース表現に基づき画像再構成を行った [4]。この手法は CSMRI [3] に比べて高精度に画像を再構成できるが、対象画像固有の特徴を忠実に再現できない場合が多々ある。

そこで Ravishankar らは、再構成中の MR 画像のパッチから辞書を適応的に学習する手法を提案した [5]。この手法では対象画像に特化したスパース表現を獲得できるため、より高精度な画像再構成が可能となる。しかし、適応辞書の更新に伴って再構成時間が増大するという問題が新たに生じた。Huang らは、適応辞書の各列ベクトルを互いに直交させることで再構成時間の短縮を図った [6]。適応直交辞書の利用によって、文献 [5] の手法と比べて再構成時間を 1/10 以下に短縮できるが、再構成精度は若干劣化してしまう。特に、直交制約により列ベクトル数が制限されるため、高周波成分の学習が困難となってしまう。

藤井らは、高品質な MR 画像をできる限り高速に再構成するために、2つの直交辞書を用いる手法を提案した [7]。この手法では適応直交辞書と共に事前直交辞書を使用し、前者で主に低周波成分を、後者で主に高周波成分を表現しようとしている。従来手法 [5,6] に比べて再構成精度は向上したものの、空間周波数成分の重み付けに起因して FISTA [12] による繰り返し計算で画像を更新するため、全体の再構成時間は Ravishankar らの手法 [5] よりも 2 割ほど長くなってしまふ。他にも、事前直交辞書を用いても高周波成分の復元が十分でないという問題や、対象画像と学習用画像の位相が大きく異なる場合には、高精度な画像が得られなくなるという問題も存在している。

本研究では、藤井らの手法 [7] を改良し、適応直交辞書と事前冗長辞書の 2 種類の辞書を用いることで MR 画像を高精度に再構成する。前者で位相を含む低周波成分を、後者で振幅のみの高周波成分を学習する。また、画像更新時に空間周波数成分の重み付けに伴って逆行列計算が困難になると考えられていたある行列が、Block Circulant with Circulant Blocks (BCCB) 構造を有することを明らかにする。これによって画像更新時に FISTA による繰り返し計算を必要としなくなり、結果として再構成時間を Ravishankar らの手法 [5] の 3/5 以下まで短縮できる。実データを用いた数値実験により、提案手法が高品質な MR 画像を比較的高速に再構成できることを示す。

## 2. 高速撮像 MRI における画像再構成

### 2.1 圧縮センシング MRI (CSMRI)

高速撮像 MRI において、観測信号  $\mathbf{y} \in \mathbb{C}^M$  は

$$\mathbf{y} = F_S \mathbf{x} + \boldsymbol{\varepsilon} \quad (1)$$

のように与えられる。ここで、 $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$  はサイズ  $\sqrt{N} \times \sqrt{N}$  の MR 画像 (複素数値信号)、 $F_S \in \mathbb{C}^{M \times N}$  はアンダーサンプリングされたフーリエ変換、 $\boldsymbol{\varepsilon} \in \mathbb{C}^M$  は観測雑音である。観測行列  $F_S$  は、正規化された 2 次元離散フーリエ変換行列  $F \in \mathbb{C}^{N \times N}$  とサンプリング行列  $S \in \{0, 1\}^{M \times N}$  (ただし、 $\forall i \sum_{j=1}^N S[i, j] = 1$  かつ  $\forall j \sum_{i=1}^M S[i, j] \leq 1$ ) を用いて、 $F_S := SF$  と定義される。

$$\underset{\mathbf{x}}{\text{minimize}} \mu \|F_S \mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2^2 + \|\Psi \mathbf{x}\|_1 + \nu \text{TV}_1(\mathbf{x}) \quad (2)$$

を解くことで画像を再構成する CSMRI と呼ばれる手法を提案した [3]。ここで、 $\|\cdot\|_2, \|\cdot\|_1$  は  $\ell_2$  ノルムと  $\ell_1$  ノルム、 $\Psi \in \mathbb{C}^{N \times N}$  は離散ウェーブレット変換、 $\text{TV}_1$  は非等方性全変動、 $\mu > 0$  と  $\nu > 0$  は評価関数内の各項の重みを決定するパラメータである。この手法は、圧縮率  $M/N$  が 1/3 程度までならば MR 画像を高精度に再構成できる。しかしながら、ウェーブレット変換や差分行列は自然画像に対しての一般的なスパース化変換であり、複素数値信号である MR 画像には特化していない。そのため、高圧縮信号に対しては再構成精度が大きく劣化してしまう。

### 2.2 辞書学習を利用した MR 画像再構成

#### 2.2.1 事前辞書を用いる再構成手法

高圧縮観測信号からも高品質な MR 画像を得るために、Chen らはパッチベースの辞書を事前に学習する手法を提案した [4]。まず、時間をかけて撮像した高品質な学習用 MR 画像  $\mathbf{x}^{\text{tra}} \in \mathbb{C}^N$  をサイズ  $\sqrt{n} \times \sqrt{n}$  のパッチと呼ばれる小領域  $\mathbf{x}_q^{\text{tra}} \in \mathbb{C}^n$  ( $q = 1, 2, \dots, Q$ ) に分割し、非凸な最適化問題

$$\underset{D, C}{\text{minimize}} \sum_{q=1}^Q \|\mathbf{x}_q^{\text{tra}} - D \mathbf{c}_q\|_2^2 \quad \text{s.t.} \begin{cases} \|\mathbf{d}_k\|_2 = 1 \\ \|\mathbf{c}_q\|_0 \leq T \end{cases} \quad (3)$$

を近似的に解くことにより事前辞書  $D_p$  を作成する。ここで、 $D = (\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \dots, \mathbf{d}_K) \in \mathbb{C}^{n \times K}$ 、 $C = (\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_Q) \in \mathbb{C}^{K \times Q}$  であり、 $\mathbf{d}_k \in \mathbb{C}^n$  は辞書のアトム、 $K$  はアトム数、 $\mathbf{c}_q \in \mathbb{C}^K$  は各パッチ  $\mathbf{x}_q^{\text{tra}}$  を表現するスパース係数、 $\|\cdot\|_0$  は  $\ell_0$  擬ノルム、 $T$  は所望のスパースレベルを表す。式 (3) の問題の近似解は、OMP [13] に MOD [9] や K-SVD [10] 等を組み合わせることで求まる。次に、得られた事前辞書  $D_p$  に基づく凸最適化問題

$$\underset{\mathbf{x}, C}{\text{minimize}} \mu \|F_S \mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2^2 + \sum_{q=1}^Q (\|\mathbf{x}_q - D_p \mathbf{c}_q\|_2^2 + \lambda \|\mathbf{c}_q\|_1) + \nu \text{TV}_2(\mathbf{x}) \quad (4)$$

を解くことにより MR 画像を再構成する。ここで、 $\mathbf{x}_q \in \mathbb{C}^n$  は  $\mathbf{x}$  から抽出されたサイズ  $\sqrt{n} \times \sqrt{n}$  のパッチ、 $\text{TV}_2$  は等方性全変動、 $\lambda > 0$  は  $\mathbf{c}_q$  のスパースレベルを調整する重みである。

この手法では、MR 画像に適したスパース表現を事前に学習するため、高圧縮信号からも画像を高精度に再構成できるようになる。しかし、辞書学習に再構成対象の情報を用いないため、対象画像が固有の構造を持つ場合や、対象画像と学習用画像の位相が異なる場合には、高品質な MR 画像が得られなくなってしまう。また、式 (2) や式 (4) で使われている全変動は、位相が変動する画像に対しては大きな値を取るため有効ではない。

#### 2.2.2 適応辞書を用いる再構成手法

Ravishankar らは、再構成対象の MR 画像から適応的に辞書を学習する Dictionary Learning MRI (DLMRI) と呼ばれる再構成手法を提案した [5]。この手法では、非凸な最適化問題

$$\underset{\mathbf{x}, D, C}{\text{minimize}} \mu \|F_S \mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2^2 + \sum_{q=1}^Q \|\mathbf{x}_q - D \mathbf{c}_q\|_2^2 \quad \text{s.t.} \begin{cases} \|\mathbf{d}_k\|_2 = 1 \\ \|\mathbf{c}_q\|_0 \leq T \end{cases} \quad (5)$$

を解くことで、辞書学習と画像再構成を同時に行う。DLMRIでは、観測信号の逆フーリエ変換結果  $F_S^H \mathbf{y}$  を初期画像として、「辞書  $D$  及び係数  $C$ 」と「MR 画像  $\mathbf{x}$ 」を交互に更新していく。適応的な辞書学習によって対象画像に応じた辞書が作成されるため、事前辞書を用いた手法 [4] に比べて画像をより高精度に再構成する。しかし、適応辞書の更新に伴い再構成時間が増大し、アーチファクトも学習されてしまうという問題が生じる。

### 2.2.3 適応直交辞書を用いる手法

Huang らは、適応辞書の列ベクトルを互いに直交させることで、DLMRI と比較して再構成時間を大幅に短縮させる手法を提案した [6]。本稿ではこの手法を Fast DLMRI と呼ぶ。Fast DLMRI では、適応辞書のアトム数を  $K = n$  として最適化問題

$$\begin{aligned} \underset{\mathbf{x}, D, C}{\text{minimize}} \quad & \mu \|\mathbf{F}_S \mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2^2 + \sum_{q=1}^Q (\|\mathbf{x}_q - D \mathbf{c}_q\|_2^2 + \lambda \|\mathbf{c}_q\|_0) \\ \text{s.t.} \quad & D^H D = I_n \end{aligned} \quad (6)$$

を解く。ここで、 $I_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$  は  $n$  次の単位行列である。式 (5) と異なり、式 (6) では辞書のアトム  $\mathbf{d}_k$  が互いに直交する必要がある。また、アトム数も  $n$  に制限されており、各パッチ  $\mathbf{x}_q$  を同一のスパースレベルで表現することが難しいため、 $\|\mathbf{c}_q\|_0$  の値を最適化問題の制約条件にするのではなく、評価関数内の第 3 項として用いている。

式 (6) では、 $\mathbf{x}, D, C$  のうちの 1 変数のみに着目して得られる部分問題の解を全て閉形式で与えることができる。したがって、 $D, C$  の近似解を K-SVD [10] の繰り返しと OMP [13] で求める DLMRI と比較して、再構成精度は若干劣化するものの、再構成時間を 1/10 以下に短縮できる。しかしながら、適応直交辞書では、直交制約及びアトム数の制限によって高周波成分の学習が困難となり、対象画像の細部構造を鮮明に再構成できない。

### 2.2.4 適応直交辞書と事前直交辞書を用いる再構成手法

藤井らは、高品質な MR 画像をできる限り高速に再構成するために、適応直交辞書  $D_a \in \mathbb{C}^{n \times n}$  と事前直交辞書  $D_p \in \mathbb{C}^{n \times n}$  を同時に用いる手法を提案した [7]。適応直交辞書  $D_a$  で学習する対象画像の低周波成分に、事前直交辞書  $D_p$  で学習済みの高周波成分を組み合わせることで、高品質な MR 画像を再構成する。この考えを実現するために、事前直交辞書  $D_p$  に基づく項を式 (6) に追加した最適化問題

$$\begin{aligned} \underset{\mathbf{x}, D_a, C_a, C_p}{\text{minimize}} \quad & \mu \|\mathbf{F}_S \mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2^2 + \sum_{q=1}^Q (\|\mathbf{x}_q - D_a \mathbf{c}_q^a\|_2^2 + \lambda_1 \|\mathbf{c}_q^a\|_0) \\ & + \nu \sum_{q=1}^Q (\|W F_n \mathbf{x}_q - D_p \mathbf{c}_q^p\|_2^2 + \lambda_2 \|\mathbf{c}_q^p\|_0) \quad \text{s.t.} \quad D_a^H D_a = I_n \end{aligned} \quad (7)$$

を解く。ここで、 $F_n \in \mathbb{C}^{n \times n}$  は  $\sqrt{n} \times \sqrt{n}$  のパッチに対する正規化された 2 次元フーリエ変換、 $W \in \mathbb{R}^{n \times n}$  は高周波成分を強調するための重み行列、 $C_a = (\mathbf{c}_1^a, \mathbf{c}_2^a, \dots, \mathbf{c}_Q^a) \in \mathbb{C}^{n \times Q}$  と  $C_p = (\mathbf{c}_1^p, \mathbf{c}_2^p, \dots, \mathbf{c}_Q^p) \in \mathbb{C}^{n \times Q}$  は適応直交辞書  $D_a$  と事前直交辞書  $D_p$  による各パッチのスパース表現である。この方法では、従来手法 [5, 6] に比べて再構成精度は向上するが、画像更新の際に FISTA [12] による繰り返し計算を用いるため、全体の再

構成時間は Ravishankar らの手法 [5] よりも長くなってしまう。また、高周波成分の復元は依然として不十分であり、対象画像と学習用画像の位相が大きく異なる場合に再構成精度が著しく劣化してしまう問題も解決されていない。

## 3. 適応直交辞書と事前冗長辞書を用いる再構成

本研究では、藤井らの手法 [7] の再構成精度に関する問題点：

- 高周波成分に対する不十分な再構成精度
- 対象画像と学習用画像の位相差による再構成精度の劣化

を解決するために、適応直交辞書  $D_a \in \mathbb{C}^{n \times n}$  と振幅画像のみから学習される事前冗長辞書  $D_p \in \mathbb{R}^{n \times K}$  を用いる再構成手法を提案する。提案手法では、適応直交辞書  $D_a$  で位相を含む低周波成分を表現し、事前冗長辞書  $D_p$  で振幅画像の高周波成分を表現する。ここで、複雑な高周波成分を高精度に再構成するため、事前辞書を直交辞書から通常の冗長辞書に変更している。また、事前辞書は MR 画像の振幅のみから生成されるため実数値行列となり、対象画像と学習用画像の位相差も無視できる。

提案手法は、式 (7) を改良した以下の最適化問題

$$\begin{aligned} \underset{\mathbf{x}, D_a, C_a, C_p}{\text{minimize}} \quad & \mu \|\mathbf{F}_S \mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2^2 + \sum_{q=1}^Q (\|\mathbf{x}_q - D_a \mathbf{c}_q^a\|_2^2 + \lambda \|\mathbf{c}_q^a\|_0) \\ & + \nu \sum_{q=1}^Q \|W F_n (|\mathbf{x}_q| - D_p \mathbf{c}_q^p)\|_2^2 \quad \text{s.t.} \quad \begin{cases} D_a^H D_a = I_n \\ \|\mathbf{c}_q^p\|_0 \leq T \end{cases} \end{aligned} \quad (8)$$

を解くことで MR 画像を再構成する。ここで、 $|\mathbf{x}_q| \in \mathbb{R}^n$  は各パッチ  $\mathbf{x}_q$  の振幅を表す。変数  $F_n, W, C_a$  は式 (7) と同じものを表しており、 $C_p = (\mathbf{c}_1^p, \mathbf{c}_2^p, \dots, \mathbf{c}_Q^p) \in \mathbb{R}^{K \times Q}$  は事前冗長辞書  $D_p$  による各パッチの振幅  $|\mathbf{x}_q|$  のスパース表現である。式 (8) の問題を解く際に、藤井らの手法 [7] における残る問題点：

- FISTA による繰り返し計算に伴う再構成時間の増加
- を解決するため、逆行列計算は困難と従来考えられていたある行列が、BCCB 構造を有することを明らかにする。これにより当該行列の逆行列計算が可能となるため、提案手法は藤井らの手法 [7] の問題点を全て解決し、高精度かつ比較的高速に MR 画像を再構成できる。以下で提案手法の詳細を述べる。

### 3.1 重み付き事前辞書学習

提案手法では、まず学習用 MR 画像から事前冗長辞書  $D_p$  を作成する。学習用画像  $\mathbf{x}^{\text{tra}} \in \mathbb{C}^N$  の振幅を  $\sqrt{n} \times \sqrt{n}$  のパッチ  $|\mathbf{x}_q^{\text{tra}}| \in \mathbb{R}^n$  ( $q = 1, 2, \dots, Q$ ) に分解した後に、2 次元フーリエ変換  $F_n$  を適用して空間周波数成分に変換されたパッチ  $\Phi^{\text{tra}} := F_n (|\mathbf{x}_1^{\text{tra}}|, |\mathbf{x}_2^{\text{tra}}|, \dots, |\mathbf{x}_Q^{\text{tra}}|) \in \mathbb{C}^{n \times Q}$  を得る。画像のエッジや細部構造を表現する高周波成分を学習するために、重み行列  $W$  によって高周波成分を強調した<sup>(注1)</sup>非凸な最適化問題

$$\underset{D, C}{\text{minimize}} \quad \|W (\Phi^{\text{tra}} - F_n D C)\|_F^2 \quad \text{s.t.} \quad \begin{cases} \|\mathbf{d}_k\|_2 = 1 \\ \|\mathbf{c}_q\|_0 \leq T \end{cases} \quad (9)$$

(注1)：例えばサイズ  $4 \times 4$  のパッチに対して 2 次元離散フーリエ変換を行うと、(0, 0) から (3, 3) までの 16 個の周波数成分が得られる。(0, 0) が最も低周波な成分であり、(2, 2) が最も高周波な成分である。4 節の数値実験では重み  $w$  を、(0, 0) 成分は  $w = 0$ , (0, 1), (0, 3), (1, 0), (3, 0) 成分は  $w = 1$ , (0, 2), (1, 1), (1, 3), (2, 0), (3, 1), (3, 3) 成分は  $w = 6$ , (1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 2) 成分は  $w = 9$ , (2, 2) 成分は  $w = 12$  とした。

の近似解として  $D_p$  を作成する。ここで、 $\|\cdot\|_F$  はフロベニウスノルムである。式 (9) の問題は一見すると複雑そうであるが、 $F_n D := \widehat{D} = (\widehat{d}_1, \widehat{d}_2, \dots, \widehat{d}_K) \in \mathbb{C}^{n \times K}$  と定義すれば、 $\widehat{D}$  の各列ベクトルは  $\|\widehat{d}_k\|_2 = 1$  を満たすことが分かる。したがって、文献 [14] で提案されている重み付き辞書学習と同様に、OMP と K-SVD を少し修正するだけで近似解を求めることができる。

### 3.2 MR 画像再構成

#### 3.2.1 適応直交辞書学習と係数更新ステップ

DLMRI と同様に、観測信号の逆フーリエ変換結果  $F_S^H \mathbf{y}$  を初期画像とする。そして、「辞書  $D_a$  及び係数  $C_a, C_p$ 」と「MR 画像  $\mathbf{x}$ 」を交互に更新していくことで式 (8) の問題を解く。まず画像  $\mathbf{x}$  を固定し、パッチ行列  $X := (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_Q) \in \mathbb{C}^{n \times Q}$  を作成する。適応直交辞書  $D_a$  と係数  $C_a$  は最適化問題

$$\underset{D_a, C_a}{\text{minimize}} \|X - D_a C_a\|_F^2 + \lambda \|C_a\|_0 \quad \text{s.t. } D_a^H D_a = I_n$$

の近似解に更新される。具体的には、文献 [11] に基づいて

$$\begin{cases} C_a = H_\lambda(D_a^H X) \\ D_a = UV^H \quad (\text{ただし, } XC_a^H = U\Sigma V^H) \end{cases}$$

を終了条件が満たされるまで繰り返す。ここで、 $H_\lambda$  はハード閾値処理を表し、絶対値が  $\sqrt{\lambda}$  より小さな値を 0 に置き換える。係数  $C_p$  は、列ベクトルごとに最適化問題

$$\underset{c_q^p}{\text{minimize}} \|WF_n(|\mathbf{x}_q| - D_p c_q^p)\|_2^2 \quad \text{s.t. } \|c_q^p\|_0 \leq T$$

の近似解に更新される。この問題は、3.1 節と同様に OMP を少し修正したアルゴリズムにより近似的に解くことができる。

#### 3.2.2 画像更新ステップ

次に MR 画像  $\mathbf{x}$  を更新する。画像更新ステップでは、式 (8) において  $\mathbf{x}$  以外の変数を固定した最適化問題

$$\underset{\mathbf{x}}{\text{minimize}} \mu \|F_S \mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2^2 + \sum_{q=1}^Q \|\mathbf{x}_q - D_a c_q^a\|_2^2 + \nu \sum_{q=1}^Q \|WF_n(|\mathbf{x}_q| - D_p c_q^p)\|_2^2 \quad (10)$$

を解けばよい。ただし、この問題を直接解くことは難しいため、本研究では以下の 2 段階に分けて近似的に解く。まず、式 (10) の第 2 項、及び第 3 項によって定義される部分問題

$$\underset{\mathbf{x}}{\text{minimize}} \sum_{q=1}^Q \|\mathbf{x}_q - D_a c_q^a\|_2^2 + \nu \sum_{q=1}^Q \|WF_n(|\mathbf{x}_q| - D_p c_q^p)\|_2^2 \quad (11)$$

を解く。そして上記部分問題の解  $\widehat{\mathbf{x}}$  を用いて定義される問題

$$\underset{\mathbf{x}}{\text{minimize}} \frac{\mu}{n} \|F_S \mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2^2 + \|\mathbf{x} - \widehat{\mathbf{x}}\|_2^2 \quad (12)$$

を解くことによって、式 (10) の問題の解を近似的に求める。

まず式 (11) の問題を解く。パッチ抽出行列を  $R_q \in \{0, 1\}^{n \times N}$  とし、位相行列を  $P_x = \text{diag}(e^{i\angle x_1}, e^{i\angle x_2}, \dots, e^{i\angle x_N}) \in \mathbb{C}^{N \times N}$  で表せば、 $|\mathbf{x}_q| = R_q P_x^H \mathbf{x}$  が成り立つ。また、ストライドを 1 として、上端と下端、及び右端と左端の繰り返しを含めて全ての

パッチを抽出した場合には  $Q = N$  となる。よって、式 (11) は

$$\underset{\mathbf{x}}{\text{minimize}} \sum_{q=1}^N \left( \|R_q \mathbf{x} - D_a c_q^a\|_2^2 + \nu \|WF_n(R_q P_x^H \mathbf{x} - D_p c_q^p)\|_2^2 \right) \quad (13)$$

となる。式 (13) の第 1 項に関して、勾配の一致性から

$$\sum_{q=1}^N \|R_q \mathbf{x} - D_a c_q^a\|_2^2 = n \left\| \mathbf{x} - \frac{1}{n} \sum_{q=1}^N R_q^T D_a c_q^a \right\|_2^2 + \text{Const.}$$

が成り立つため、解  $\widehat{\mathbf{x}}$  の位相は、 $\widetilde{\mathbf{x}} := \frac{1}{n} \sum_{q=1}^N R_q^T D_a c_q^a$  の位相と一致する。 $\widetilde{\mathbf{x}}$  の位相行列を  $\widetilde{P}$  とすれば、式 (13) から解  $\widehat{\mathbf{x}}$  は

$$\begin{aligned} & \left[ nI + \nu \widetilde{P} \left( \sum_{q=1}^N R_q^T F_n^H W^2 F_n R_q \right) \widetilde{P}^H \right] \widehat{\mathbf{x}} \\ & = \sum_{q=1}^N R_q^T D_a c_q^a + \nu \widetilde{P} \sum_{q=1}^N R_q^T F_n^H W^2 F_n D_p c_q^p \quad (14) \end{aligned}$$

を満たす。ここで、本研究で以下の定理を新たに証明した。

[定理]  $R_q \in \{0, 1\}^{n \times N}$  を  $\sqrt{N} \times \sqrt{N}$  の画像から  $\sqrt{n} \times \sqrt{n}$  のパッチを抽出する行列とする。ストライドを 1 として、上端と下端、及び右端と左端を繋げて全てのパッチを抽出すると、総パッチ数は  $N$  となり、任意の行列  $L \in \mathbb{C}^{l \times n}$  に対して、

$$\sum_{q=1}^N R_q^T L^H L R_q$$

は BCCB 行列となる (ページ制限のため、証明は省略する)。

定理において  $L = WF_n$  とおけば、式 (14) の左辺第 2 項の行列が BCCB 構造を有することが分かる。したがって、当該行列は、ある対角行列  $\Lambda \in \mathbb{R}^{N \times N}$  と 2 次元離散フーリエ変換行列  $F$  を用いて

$$\sum_{q=1}^N R_q^T F_n^H W^2 F_n R_q = F^H \Lambda F$$

のように固有値分解できる。したがって、式 (14) は

$$\begin{aligned} & \widetilde{P} F^H (nI + \nu \Lambda) F \widetilde{P}^H \widehat{\mathbf{x}} \\ & = \sum_{q=1}^N R_q^T D_a c_q^a + \nu \widetilde{P} \sum_{q=1}^N R_q^T F_n^H W^2 F_n D_p c_q^p \end{aligned}$$

となり、結果として部分問題の解  $\widehat{\mathbf{x}}$  は

$$\widehat{\mathbf{x}} = \widetilde{P} F^H (nI + \nu \Lambda)^{-1} F \left( n|\widetilde{\mathbf{x}}| + \nu \sum_{q=1}^N R_q^T F_n^H W^2 F_n D_p c_q^p \right) \quad (15)$$

のように離散フーリエ変換を用いて高速に計算可能となる。

式 (15) で求まる  $\widehat{\mathbf{x}}$  を用いて、式 (12) の問題を解く。これは  $\mathbf{x}$  に関する比較的単純な最小二乗問題であり、最適解  $\mathbf{x}^*$  は

$$\mathbf{x}^* = F^H \left( \frac{\mu}{n} S^T S + I \right)^{-1} \left( \frac{\mu}{n} S^T \mathbf{y} + F \widehat{\mathbf{x}} \right) \quad (16)$$

によって与えられ、式 (16) により画像更新ステップが終了する。そして再び 3.2.1 節に戻り、適応直交辞書と係数の更新を行う。

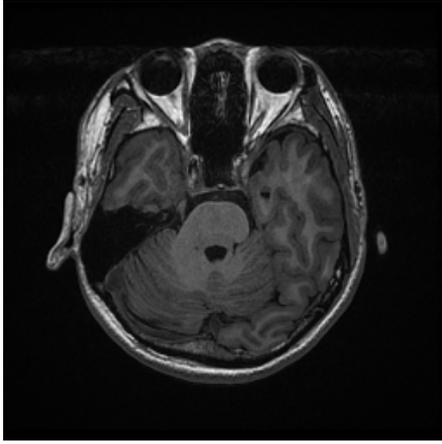


図1 重み付き事前辞書学習に用いた学習用 MR 画像 (No. 50)

#### 4. 計算機シミュレーション

GE Healthcare UK 社製 MRI 装置 SignalHDxt 1.5T で得られた健常な 20 代男性の頭部画像をシミュレーションに用いた。まず,  $TR = 12.4$  [ms],  $TE = 5.2$  [ms],  $FOV = 240$  [mm]  $\times$   $240$  [mm],  $Gap = 0$ ,  $Thickness = 1$  [mm] に設定し, 8ch Brain Coil を使用して実験参加者 A の頭部を 156 枚撮像した。学習用画像は No. 50 の MR 画像 (図 1) とした。再構成対象画像は視覚的に学習用画像と異なる No. 33 及び No. 90 の MR 画像 (図 2(a) 及び図 2(b)) とした。これらの画像を, 最大画素値が 1 になるように正規化して用いた。圧縮率  $\frac{77 \times 256}{256^2} \approx 0.3$  のサンプリングマスク (図 2(c)) により観測を行い, 提案手法と DLMRI [5] 及び Fast DLMRI [6] の再構成結果を比較した。正則化パラメータ  $\mu$  は, 式 (1) で雑音を  $\epsilon = \mathbf{0}$  としたため,  $\mu = \infty$  に設定した。バッチサイズは  $4 \times 4$  で共通として, DLMRI では  $K$  と  $T$  を, Fast DLMRI では  $\lambda$  を, 提案手法では  $K$ ,  $T$ ,  $\lambda$  及び  $\nu$  を最適な値に設定した。更新回数を 200 とし, PSNR と再構成時間を評価した。MacBook Pro (OS 10.13.1, Intel Core i5, 2.7GHz, 8GB) において Matlab R2018a を使用して実験を実施した。

シミュレーション結果を表 1 と表 2 に示す。表 1 から, 提案手法による再構成結果が最も高精度であることが分かる。表 2 から, Fast DLMRI が最も高速ではあるが, 提案手法は DLMRI と比較して再構成時間を最大 1/2 程度に短縮している。図 3 と図 4 にそれぞれの手法により再構成された MR 画像の振幅を示す。提案手法による再構成結果は DLMRI と比べてアーチファクトの誤学習が少なく, Fast DLMRI と比べて鮮明であり, 提案手法が細部構造を最も良く復元していることが確認できる。

#### 5. おわりに

本研究では, 適応直交辞書と事前冗長辞書を用いる MR 画像再構成手法を提案した。提案手法では, 対象画像の位相を含む低周波成分を高速に学習し, それに事前に学習させた振幅の高周波成分を組み合わせることで, 高品質な画像を再構成する。実際の頭部画像を用いたシミュレーションにより, 従来手法と比較して, 細部構造がより鮮明に再構成できることを示した。また, 画像更新時に, 空間周波数成分の重み付けに伴い逆行列

表 1 各手法の PSNR [dB] の比較

画像 / 手法	DLMRI	Fast DLMRI	提案手法
No. 33	33.09	31.78	<b>34.22</b>
No. 90	32.58	33.02	<b>35.50</b>

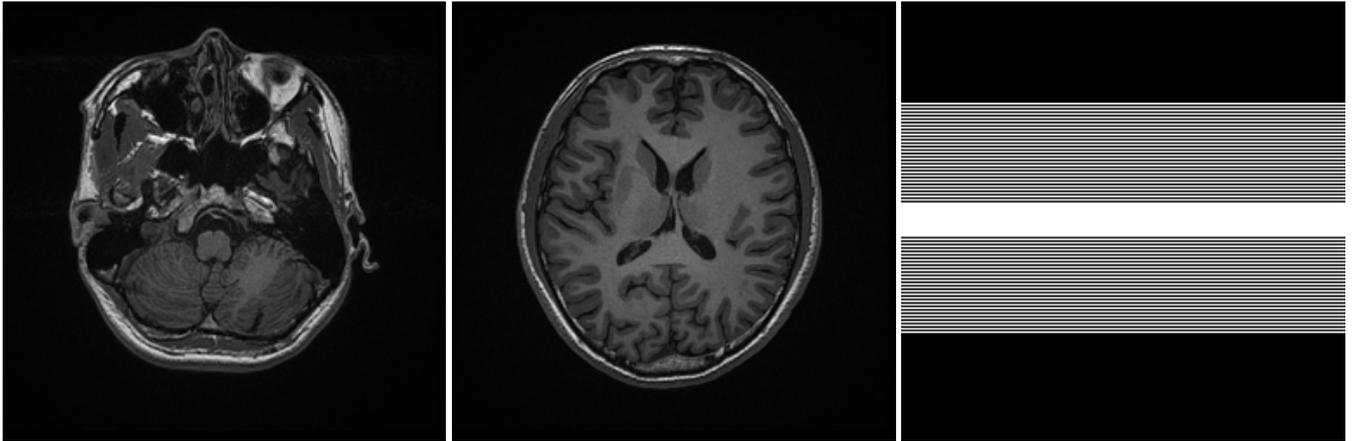
表 2 各手法の再構成時間 [秒] の比較

画像 / 手法	DLMRI	Fast DLMRI	提案手法
No. 33	4393	<b>302</b>	2184
No. 90	3462	<b>279</b>	1996

の計算が困難になるという問題を, 当該行列が BCCB 行列であることを明らかにすることで解決し, これにより提案手法が MR 画像を高精度かつ比較的高速に再構成できるようになった。

#### 文 献

- [1] S. W. Young, *Nuclear Magnetic Resonance Imaging: Basic Principles*. New York: Raven Press, 1984.
- [2] D. J. Brenner and E. J. Hall, "Computed tomography—An increasing source of radiation exposure," *The New England Journal of Medicine*, vol. 357, no. 22, pp. 2277–2284, 2007.
- [3] M. Lustig, D. L. Donoho, and J. M. Pauly, "Sparse MRI: The application of compressed sensing for rapid MR imaging," *Magnetic Resonance in Medicine*, vol. 58, no. 6, pp. 1182–1195, Dec. 2007.
- [4] Y. Chen, X. Ye, and F. Huang, "A novel method and fast algorithm for MR image reconstruction with significantly undersampled data," *Inverse Problems and Imaging*, vol. 4, no. 2, pp. 223–240, May 2010.
- [5] S. Ravishankar and Y. Bresler, "MR image reconstruction from highly undersampled k-space data by dictionary learning," *IEEE Transactions on Medical Imaging*, vol. 30, no. 5, pp. 1028–1041, May 2011.
- [6] J. Huang, L. Guo, Q. Feng, W. Chen, and Y. Feng, "Sparsity-promoting orthogonal dictionary updating for image reconstruction from highly undersampled magnetic resonance data," *Phys. Med. Biol.*, vol. 60, no. 14, pp. 5359–5380, 2015.
- [7] 藤井 皓介, 中田 和希, 北原 大地, 平林 晃, "2 種類の直交辞書を用いた MR 画像高精度再構成," 第 33 回信号処理シンポジウム, 東京, 2018, pp. 219–224.
- [8] D. L. Donoho, "Compressed sensing," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 52, no. 4, pp. 1289–1306, 2006.
- [9] K. Engan, S. O. Aase, and J. H. Husøy, "Method of optimal directions for frame design," in *Proceedings of IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing (ICASSP)*, 1999, pp. 2443–2446.
- [10] M. Aharon, M. Elad, and A. M. Bruckstein, "K-SVD: An algorithm for designing overcomplete dictionaries for sparse representation," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 54, no. 11, pp. 4311–4322, Nov. 2006.
- [11] C. Bao, J. F. Cai, and H. Ji, "Fast sparsity-based orthogonal dictionary learning for image restoration," in *Proceedings of IEEE International Conference on Computer Vision (ICCV)*, 2013, pp. 3384–3391.
- [12] A. Beck and M. Teboulle, "A fast iterative shrinkage-thresholding algorithm for linear inverse problems," *SIAM Journal on Imaging Sciences*, vol. 2, no. 1, pp. 182–202, 2009.
- [13] Y. C. Pati, R. Rezaifar, and P. S. Krishnaprasad, "Orthogonal matching pursuit: Recursive function approximation with applications to wavelet decomposition," in *Proceedings of Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers*, 1993, pp. 40–44.
- [14] J. Liu, X. C. Tai, H. Huang, and Z. Huan, "A weighted dictionary learning model for denoising images corrupted by mixed noise," *IEEE Transactions on Image Processing*, vol. 22, no. 3, pp. 1108–1120, Mar. 2013.

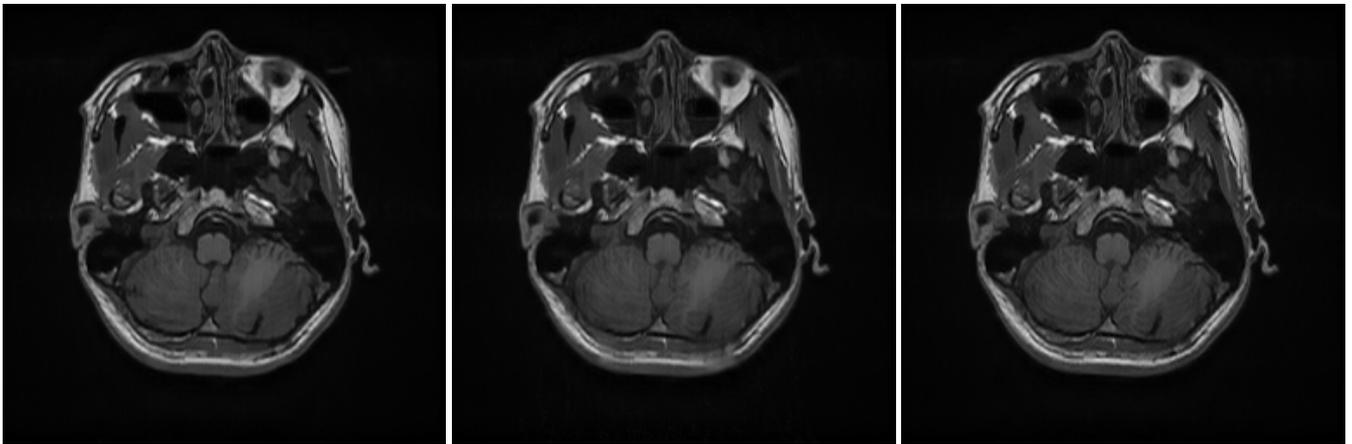


(a) No. 33 の MR 画像

(b) No. 90 の MR 画像

(c) サンプルングマスク

図 2 再構成対象の MR 画像 (No. 33 及び No. 90) と圧縮率約 0.3 のサンプルングマスク

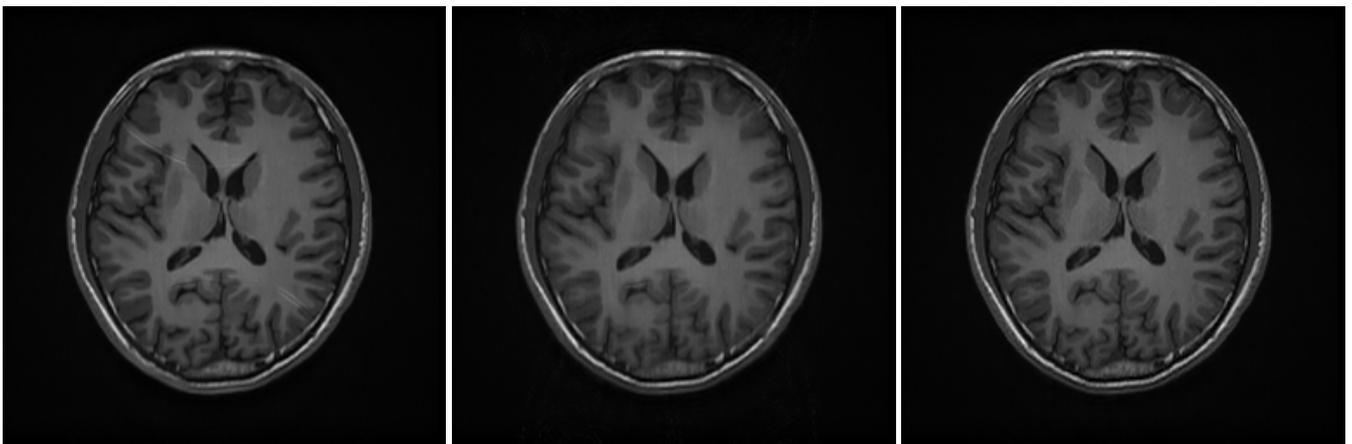


(a) DLMRI による再構成結果

(b) Fast DLMRI による再構成結果

(c) 提案手法による再構成結果

図 3 No. 33 の MR 画像の再構成結果



(a) DLMRI による再構成結果

(b) Fast DLMRI による再構成結果

(c) 提案手法による再構成結果

図 4 No. 90 の MR 画像の再構成結果