2種類の直交辞書を用いたMR画像高精度再構成

High-Quality MR Image Reconstruction Using Two Orthogonal Dictionaries

藤井 皓介　　中田 和希　　北原 大地　　平林 晃
立命館大学 情報理工学部

Kosuke FUJII　　Kazuki NAKATA　　Daichi KITAHARA　　Akira HIRABAYASHI
College of Information Science and Engineering, Ritsumeikan University

あらまし　高速撮像可能な磁気共鳴画像法 (MRI) として，圧縮センシング MRI (CSMRI) が知られている．CSMRI では，一部のデータのみを観測することで撮像時間を短縮し，ある種の最適化問題を解くことで MR 画像を再構成する．高精度な再構成手法として，適応的な辞書学習を用いる方法が提案されているが，(i) 再構成時間が長い，(ii) 高周波成分が復元されないという問題があった．本研究では，適応型と事前型の 2 種類の直交辞書を用いた画像再構成手法を提案する．提案法では，直交辞書を用いることで，辞書更新にかかる時間を大幅に短縮する．また，適応辞書で対象画像固有の低周波成分を復元し，事前辞書で高周波成分を復元することで，再構成精度を向上させる．実データを用いた数値実験によって提案法の有効性を示す．

1　はじめに

磁気共鳴画像法 (Magnetic Resonance Imaging: MRI) [1], [2] は強力な磁場を発生させて生体の内部構造を撮像する医療機器である．X 線を利用するコンピュータ断層撮影法 (Computed Tomography: CT) [3] と比較すると，MRI には放射線被曝を伴わないという利点がある．一方で，各種設定にもよるが，一度の撮像に数十分かかるという欠点がある．このため，撮像対象が動くと画質が大きく劣化するという問題があり，心臓などの常に動いている器官を撮像することが難しい．また，MRI 装置の内部は狭く，撮像中に発生する騒音が大きいこともあり，長い撮像時間は被験者の大きな負担となっている．これらの理由から，MR 撮像の高速化が求められている．

MRI では，データを一括ではなく時間軸上で順次取得するため，撮像時間が取得データ数にほぼ比例している．したがって，取得データ数を減らせば MR 撮像を高速化できる．取得した一部のデータに対して，通常の画像再構成手法である逆フーリエ変換を適用すると，画像が不鮮明になり，折り返しパターン等のアーチファクトも発生してしまう．この問題を解決するために，圧縮センシング (Compressed Sensing: CS) に基づく再構成手法が提案されてきた [4]–[8]．圧縮センシング [9] とは，ある表現空間では未知の対象信号がスパースになることを利用し，少数の観測信号から対象信号を高精度に推定する技術である．

まず Lustig らが，圧縮センシング MRI (CSMRI) と呼ばれる高速 MR 撮像法を提案した [4]．この手法では,「観測信号との整合性」,「離散ウェーブレット変換後のスパース性」及び「隣接画素間の類似性」を考慮した評価関数を定義し，これを最小にするような MR 画像を再構成する．この方法は，圧縮率が 1/3 程度までの場合には，高精度に MR 画像を再構成できる．しかし，ウェーブレット変換という固定された変換を用いるため，より高圧縮な観測信号に対しては再構成精度が大きく低下することがある．

更なる精度向上のために，辞書学習を利用する再構成手法が開発されてきた [5]–[7]．辞書学習 [10]–[12] とは，対象信号をスパースに表現する基底 (あるいはフレーム) を生成する技術である．Chen らは，過去に撮像した高品質な MR 画像を学習用データとして辞書を作成し，この事前辞書によるスパース表現を用いて画像再構成を行った [5]．この手法では，文献 [4] の手法より高精度に画像を再構成できるが，対象画像固有の特徴を捉えきれない場合がある．

そこで Ravishankar らは，再構成中の MR 画像から適応的に辞書を学習する手法を提案した [6]．これにより，対象画像に特化したスパース表現が獲得され，より高精度な画像再構成が可能となる．しかし，適応辞書の更新に伴い，再構成時間が増大するという問題が生じた．Huang らは，適応辞書の構造に直交性を持たせることを提案した [7]．この手法では，文献 [6] の手法と比較して再構成時間を 10 倍以上短縮できるが，再構成精度は若干劣化してしまう．また，適応辞書学習では，再構成中の画像から辞書を作成するため，高周波成分の学習が難しいという問題がある．

本研究では，なるべく短い時間で高品質な MR 画像を得るために，2 種類の直交辞書を用いる再構成手法を提案する．提案法は，文献 [7] の適応直交辞書と共に，事前に作成した直交辞書を併用する．まず，学習用画像をパッチと呼ばれる小領域に分解し，各パッチに 2 次元フーリエ変換を適用して空間周波数成分に変換する．更に，低周波

本研究の一部は JSPS 科研費 (17H07243) の御支援を受けて行われた．

成分よりも高周波成分を強調した重み付けを行うことで，画像のエッジや細かな模様の情報を保持するように事前直交辞書を作成する．得られた事前辞書に関する正則化項を文献 [7] の評価関数に追加し，こうして定義された新たな評価関数を最小化することで，MR 画像を再構成する．実データを用いた数値実験によって，提案法が従来法 [6], [7] に比べて高品質な MR 画像を再構成できることを示す．

2　数学的準備

実数全体と複素数全体の集合をそれぞれ $\mathbb{R}$ と $\mathbb{C}$ で表す．ボールド体の小文字でベクトルを表し，(通常書体の) 大文字で行列を表す．ベクトル $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^N$ の第 j 成分を $\boldsymbol{x}[j]$ で表し，行列 $X \in \mathbb{C}^{M\times N}$ の第 (i,j) 成分を $X[i,j]$ で表す．ベクトル $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^N$ の ℓ_2 ノルム $\|\cdot\|_2$ 及び ℓ_1 ノルム $\|\cdot\|_1$ を $\|\boldsymbol{x}\|_2 := \sqrt{\sum_{j=1}^N |\boldsymbol{x}[j]|^2}$, $\|\boldsymbol{x}\|_1 := \sum_{j=1}^N |\boldsymbol{x}[j]|$ と定義し，ℓ_0 擬ノルム $\|\boldsymbol{x}\|_0$ の値を $\boldsymbol{x}$ の非零成分数と定義する．

2.1　圧縮センシング MRI (CSMRI)

CSMRI において，観測信号 $\boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^M$ は

$$\boldsymbol{y} = F_S\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\varepsilon} \tag{1}$$

と与えられる．ここで，$\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^N$ はサイズ $\sqrt{N}\times\sqrt{N}$ の MR 画像 (複素数値信号)，$F_S \in \mathbb{C}^{M\times N}$ はアンダーサンプリングされたフーリエ変換，$\boldsymbol{\varepsilon} \in \mathbb{C}^M$ は観測雑音である．観測行列 F_S は，正規化された 2 次元離散フーリエ変換 $F \in \mathbb{C}^{N\times N}$ とサンプリング行列 $S \in \{0,1\}^{M\times N}$ (ただし，$\forall i \sum_{j=1}^N S[i,j] = 1$ かつ $\forall j \sum_{i=1}^M S[i,j] \le 1$) を用いて，$F_S := SF$ と定義される．また，観測信号 $\boldsymbol{y}$ の圧縮率を $\frac{M}{N}$ と定義する．CSMRI における「MR 画像再構成」とは，式 (1) の $\boldsymbol{y}$ から $\boldsymbol{x}$ を推定するプロセスのことである．

Lustig らは凸最適化問題

$$\underset{\boldsymbol{x}}{\text{minimize}}\ \mu\|F_S\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|_2^2 + \|\Psi\boldsymbol{x}\|_1 + \nu\,\mathrm{TV}_1(\boldsymbol{x}) \tag{2}$$

を解くことにより MR 画像を再構成した [4]．ここで，$\Psi \in \mathbb{C}^{N\times N}$ は離散ウェーブレット変換，TV_1 は非等方性全変動 (anisotropic total variation)，$\mu > 0$ と $\nu > 0$ は評価関数内の各項の重みを決定するパラメータである．この手法は，圧縮率が $1/3$ 程度までならば MR 画像を高精度に再構成できる．しかしながら，ウェーブレット変換や差分行列は自然画像全般に対する一般的なスパース化変換であり，MR 画像に特化した変換ではない．そのため，高圧縮信号に対しては再構成精度が大きく劣化してしまう．

2.2　辞書学習を利用した MR 画像再構成

2.2.1　事前辞書を用いる再構成手法

より高圧縮な観測信号からも高品質な MR 画像を得るために，Chen らはパッチベースの辞書を事前に学習する再構成手法を提案した [5]．まず，過去に撮像した高品質な MR 画像 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{tra}} \in \mathbb{C}^N$ をサイズ $\sqrt{n}\times\sqrt{n}$ の小さなパッチ $\boldsymbol{x}_q^{\mathrm{tra}} \in \mathbb{C}^n$ $(q = 1, 2, \ldots, Q)$ に分割し，非凸な最適化問題

$$\underset{D,C}{\text{minimize}} \sum_{q=1}^{Q} \|\boldsymbol{x}_q^{\mathrm{tra}} - D\boldsymbol{c}_q\|_2^2$$
$$\text{s.t. } \|\boldsymbol{d}_k\|_2 = 1 \text{ for all } k \text{ and } \|\boldsymbol{c}_q\|_0 \le T \text{ for all } q \tag{3}$$

の (近似) 解として事前辞書 D_{p} を作成する．ここで，$D = (\boldsymbol{d}_1, \boldsymbol{d}_2, \ldots, \boldsymbol{d}_K) \in \mathbb{C}^{n\times K}$, $C = (\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \ldots, \boldsymbol{c}_Q) \in \mathbb{C}^{K\times Q}$ であり，$\boldsymbol{d}_k \in \mathbb{C}^n$ は辞書のアトム，K はアトム数，$\boldsymbol{c}_q \in \mathbb{C}^K$ はパッチ $\boldsymbol{x}_q^{\mathrm{tra}}$ の辞書 D によるスパース表現，T は所望のスパースレベルを表す．式 (3) の問題は，OMP [13] に MOD [10] や K-SVD [11] 等を組み合わせて近似的に解くことができる．次に，事前辞書 D_{p} に基づく凸最適化問題

$$\underset{\boldsymbol{x},C}{\text{minimize}}\ \mu\|F_S\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|_2^2 + \sum_{q=1}^{Q}\left(\|\boldsymbol{x}_q - D_{\mathrm{p}}\boldsymbol{c}_q\|_2^2 + \lambda\|\boldsymbol{c}_q\|_1\right) + \nu\,\mathrm{TV}_2(\boldsymbol{x}) \tag{4}$$

を解くことで MR 画像を再構成する．ここで，$\boldsymbol{x}_q \in \mathbb{C}^n$ は $\boldsymbol{x}$ から抽出されたサイズ $\sqrt{n}\times\sqrt{n}$ のパッチ，$\boldsymbol{c}_q \in \mathbb{C}^K$ はパッチ $\boldsymbol{x}_q$ の辞書 D_{p} によるスパース表現，TV_2 は等方性全変動 (isotropic total variation)，$\lambda > 0$ は各スパース表現 $\boldsymbol{c}_q$ のスパースレベルを調整するパラメータである．

この手法では，MR 画像に特化したスパース表現を事前に学習できるため，高圧縮信号からの高精度な画像再構成が実現可能となる．しかし，辞書学習時に再構成対象の情報を用いないため，対象画像が固有の構造を持つ場合や，対象画像と学習用画像の位相が大きく異なる場合には，高品質な MR 画像が得られなくなってしまう．また，式 (2) や式 (4) で使われている全変動は，位相が変動する MR 画像に対しては，大きな値を取るため有効ではない．

2.2.2　適応辞書を用いる再構成手法

Ravishankar らは，再構成対象の MR 画像から適応的に辞書を学習する Dictionary Learning MRI (DLMRI) と呼ばれる手法を提案した [6]．この手法は，非凸な最適化問題

$$\underset{\boldsymbol{x},D,C}{\text{minimize}}\ \mu\|F_S\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|_2^2 + \sum_{q=1}^{Q}\|\boldsymbol{x}_q - D\boldsymbol{c}_q\|_2^2$$
$$\text{s.t. } \|\boldsymbol{d}_k\|_2 = 1 \text{ for all } k \text{ and } \|\boldsymbol{c}_q\|_0 \le T \text{ for all } q \tag{5}$$

を解くことで，辞書学習と画像再構成を同時に実行する．DLMRI では，観測信号 $\boldsymbol{y}$ の逆フーリエ変換結果 $F_S^{\mathrm{H}}\boldsymbol{y}$ を初期画像として，「辞書 D 及び係数 C」と「MR 画像 $\boldsymbol{x}$」を交互に更新していく．適応的な辞書学習により対象画像に応じた辞書が作成されるため，事前辞書に基づく手法に比べて，より高精度に MR 画像を再構成できる．しかし，適応辞書の更新に伴って再構成時間が増大したり，アーチファクトを誤学習したりするという問題が新たに生じる．

2.2.3 適応直交辞書を用いる再構成手法

Huang らは，適応辞書の構造に直交性を持たせることで，DLMRI の再構成時間を大幅に短縮させる手法を提案した [7]．本稿ではこの手法を Fast DLMRI と呼ぶ．Fast DLMRI では，適応辞書のアトム数を $K = n$ として，問題

$$\underset{\boldsymbol{x},D,C}{\text{minimize}}\ \mu\|F_S\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|_2^2+\sum_{q=1}^{Q}(\|\boldsymbol{x}_q-D\boldsymbol{c}_q\|_2^2+\lambda\|\boldsymbol{c}_q\|_0)$$
$$\text{s.t. } D^{\mathrm{H}}D = I_n \tag{6}$$

を解く．ここで，$I_n \in \mathbb{R}^{n\times n}$ は単位行列である．式 (5) と違い，式 (6) では辞書のアトム $\boldsymbol{d}_k$ が互いに直交する必要がある．また，アトム数も n に制限されており，各パッチ $\boldsymbol{x}_q$ を同一のスパースレベルで表現することが難しいため，$\|\boldsymbol{c}_q\|_0$ の値を制約ではなく評価関数内で用いている．

式 (6) では，変数 $\boldsymbol{x}, D, C$ のうちの 1 つのみに着目して得られる部分問題の解を全て閉形式で与えることが可能である．したがって，D と C の近似解を K-SVD の繰り返しと OMP で求める DLMRI と比較して，再構成精度は若干劣化するが，再構成時間を 10 倍以上短縮できる．しかし，式 (5) や式 (6) のような適応辞書では，高周波成分の学習が難しく，対象画像の細部構造は鮮明に再構成されない．

3 2 種類の直交辞書を用いる MR 画像再構成

本研究では，適応直交辞書 $D_{\mathrm{a}} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ と事前直交辞書 $D_{\mathrm{p}} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ の 2 つを用いた，高精度な画像再構成手法を提案する．提案法では，適応辞書 D_{a} で学習する対象画像の低周波成分に，事前辞書 D_{p} で学習済みの高周波成分を組み合わせることで，高品質な MR 画像を再構成する．具体的には，式 (6) に事前辞書に基づく項を導入した問題

$$\underset{\boldsymbol{x},D_{\mathrm{a}},C_{\mathrm{a}},C_{\mathrm{p}}}{\text{minimize}}\ \mu\|F_S\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|_2^2+\sum_{q=1}^{Q}(\|\boldsymbol{x}_q-D_{\mathrm{a}}\boldsymbol{c}_q^{\mathrm{a}}\|_2^2+\lambda_1\|\boldsymbol{c}_q^{\mathrm{a}}\|_0)$$
$$+\nu\sum_{q=1}^{Q}(\|WF_n\boldsymbol{x}_q-D_{\mathrm{p}}\boldsymbol{c}_q^{\mathrm{p}}\|_2^2+\lambda_2\|\boldsymbol{c}_q^{\mathrm{p}}\|_0)\quad \text{s.t. } D_{\mathrm{a}}^{\mathrm{H}}D_{\mathrm{a}} = I_n \tag{7}$$

を解くことで MR 画像を再構成する．ここで，$F_n \in \mathbb{C}^{n\times n}$ はサイズ $\sqrt{n}\times\sqrt{n}$ のパッチに対する正規化された 2 次元フーリエ変換，$W \in \mathbb{R}^{n\times n}$ は高周波成分を強調するための重み行列 (3.1 節参照)，$C_{\mathrm{a}} = (\boldsymbol{c}_1^{\mathrm{a}}, \boldsymbol{c}_2^{\mathrm{a}}, \ldots, \boldsymbol{c}_Q^{\mathrm{a}}) \in \mathbb{C}^{n\times Q}$ と $C_{\mathrm{p}} = (\boldsymbol{c}_1^{\mathrm{p}}, \boldsymbol{c}_2^{\mathrm{p}}, \ldots, \boldsymbol{c}_Q^{\mathrm{p}}) \in \mathbb{C}^{n\times Q}$ は適応直交辞書 D_{a} と事前直交辞書 D_{p} による各パッチのスパース表現である．

異なる直交辞書による 2 種類のスパース表現 $\boldsymbol{c}_q^{\mathrm{a}}$ と $\boldsymbol{c}_q^{\mathrm{p}}$ は相反してしまう可能性があるものの，前者は主に低周波成分を学習しており，後者は高周波成分を学習している．したがって，正則化パラメータ ν を調整すれば，双方の辞書を矛盾せずに用いることができ，高品質な MR 画像が再構成される．以下の節で提案法の詳細を解説する．

3.1 高周波成分を強調した事前直交辞書学習

提案法では，まず学習用画像を用いて事前直交辞書 D_{p} を作成する．学習用画像 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{tra}} \in \mathbb{C}^N$ をサイズ $\sqrt{n}\times\sqrt{n}$ のパッチ $\boldsymbol{x}_q^{\mathrm{tra}} \in \mathbb{C}^n$ $(q = 1, 2, \ldots, Q)$ に分割した後に，離散フーリエ変換 F_n を適用して空間周波数成分に変換する．その後，画像のエッジや細部構造を表現している高周波成分を強調[1]するために重み行列 W をかける．行列 $\Phi := WF_n(\boldsymbol{x}_1^{\mathrm{tra}}, \boldsymbol{x}_2^{\mathrm{tra}}, \ldots, \boldsymbol{x}_Q^{\mathrm{tra}}) \in \mathbb{C}^{n\times Q}$ を定義し，非凸な問題

$$\underset{D,C}{\text{minimize}}\ \|\Phi - DC\|_{\mathrm{F}}^2 + \lambda_2\|C\|_0 \quad \text{s.t. } D^{\mathrm{H}}D = I_n \tag{8}$$

の近似解として D_{p} を作成する．ここで，$\|\cdot\|_{\mathrm{F}}$ は行列のフロベニウスノルムであり，$\|C\|_0 := \sum_{q=1}^{Q}\|\boldsymbol{c}_q\|_0$ である．文献 [12] に倣い，C と D を交互に更新して式 (8) を解く．

3.1.1 スパース係数更新

式 (8) で直交辞書 D を固定すると，スパース係数 C は

$$C^* = \underset{C\in\mathbb{C}^{n\times Q}}{\text{argmin}}\ \|\Phi - DC\|_{\mathrm{F}}^2 + \lambda_2\|C\|_0 \tag{9}$$
$$= \underset{C\in\mathbb{C}^{n\times Q}}{\text{argmin}}\ \|D^{\mathrm{H}}\Phi - C\|_{\mathrm{F}}^2 + \lambda_2\|C\|_0 \tag{10}$$

のように更新すればよい．ここで，式 (9) から式 (10) の変換には，ユニタリ行列をかけてもフロベニウスノルムの値は変わらない性質と，$D^{\mathrm{H}}D = I_n$ であることを利用している．式 (10) の問題の解 C^* は，ハード閾値処理

$$H_\lambda(C)[i,j] := \begin{cases} C[i,j] & \text{if } |C[i,j]| \geq \sqrt{\lambda}, \\ 0 & \text{if } |C[i,j]| < \sqrt{\lambda}, \end{cases}$$

を用いて

$$C^* = H_{\lambda_2}(D^{\mathrm{H}}\Phi) \tag{11}$$

と計算できる．

3.1.2 直交辞書更新

式 (8) でスパース係数 C を固定すると，直交辞書 D は

$$D^* = \underset{D\in\mathbb{C}^{n\times n}}{\text{argmin}}\ \|\Phi - DC\|_{\mathrm{F}}^2 \quad \text{s.t. } D^{\mathrm{H}}D = I_n \tag{12}$$

のように更新すればよい．式 (12) の問題の評価関数は，

$$\begin{aligned}\|\Phi - DC\|_{\mathrm{F}}^2 &= \|\Phi\|_{\mathrm{F}}^2 + \|DC\|_{\mathrm{F}}^2 - \mathrm{Tr}(\Phi^{\mathrm{H}}DC + C^{\mathrm{H}}D^{\mathrm{H}}\Phi) \\ &= \|\Phi\|_{\mathrm{F}}^2 + \|C\|_{\mathrm{F}}^2 - 2\mathrm{Re}(\mathrm{Tr}(C^{\mathrm{H}}D^{\mathrm{H}}\Phi)) \\ &= \|\Phi\|_{\mathrm{F}}^2 + \|C\|_{\mathrm{F}}^2 - 2\mathrm{Re}(\mathrm{Tr}(\Phi C^{\mathrm{H}}D^{\mathrm{H}}))\end{aligned} \tag{13}$$

と表せる．ここで，$\mathrm{Tr}(\cdot)$ は行列のトレースを表し，$\mathrm{Re}(\cdot)$

[1] 4 節の数値実験では，学習用画像と再構成対象画像の位相の変動がどちらも非常に緩やかであることを考慮して重み付けを行った．サイズ 4×4 のパッチに対して 2 次元離散フーリエ変換を行うと，$(0,0)$ から $(3,3)$ までの 16 個の周波数成分が得られる．位相の変動が少ないため，通常の画像処理と同様に最も低周波な $(0,0)$ 成分の絶対値が大きくなり，最も高周波な $(2,2)$ 成分の絶対値が非常に小さくなる．これに基づいて，重み w の値をそれぞれ，$(0,0)$ 成分は $w=1$，$(0,1),(0,3),(1,0),(3,0)$ 成分は $w=50$，$(0,2),(1,1),(1,3),(2,0),(3,1),(3,3)$ 成分は $w=100$，$(1,2),(2,1),(2,3),(3,2)$ 成分は $w=150$，$(2,2)$ 成分は $w=200$ とした．

は複素数の実部を返す写像を表す．式 (13) の右辺第 1 項，第 2 項は D に関しての定数項である．したがって，D は

$$D^* = \underset{D\in\mathbb{C}^{n\times n}}{\mathrm{argmax}}\ \mathrm{Re}(\mathrm{Tr}(\Phi C^{\mathrm{H}} D^{\mathrm{H}})) \quad \text{s.t. } D^{\mathrm{H}} D = I_n \tag{14}$$

のように更新される．ユニタリ行列 $U \in \mathbb{C}^{n\times n}, V \in \mathbb{C}^{n\times n}$ と対角行列 $\Sigma \in \mathbb{R}^{n\times n}$ を用いて，$\Phi C^{\mathrm{H}} = U\Sigma V^{\mathrm{H}}$ と特異値分解できるとき，式 (14) の問題の評価関数は

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}(\mathrm{Tr}(\Phi C^{\mathrm{H}} D^{\mathrm{H}})) &= \mathrm{Re}(\mathrm{Tr}(U\Sigma V^{\mathrm{H}} D^{\mathrm{H}})) \\ &= \mathrm{Re}(\mathrm{Tr}(\Sigma V^{\mathrm{H}} D^{\mathrm{H}} U))\end{aligned} \tag{15}$$

と表せる．$V^{\mathrm{H}}D^{\mathrm{H}}U$ はユニタリ行列であり，ユニタリ行列の各成分値は 1 を超えないため，式 (15) は $V^{\mathrm{H}}D^{\mathrm{H}}U = I_n$ のときに最大になる．結果として，式 (14) の問題の解 D^* は

$$D^* = UV^{\mathrm{H}} \tag{16}$$

と計算できる．式 (11) と式 (16) を収束条件が満たされるまで交互に繰り返すことで，事前直交辞書 D_{p} を作成する．

3.2　MR 画像再構成

DLMRI と同様に，観測信号の逆フーリエ変換結果 $F_S^{\mathrm{H}}\boldsymbol{y}$ を初期画像とする．そして，「辞書 D_{a} 及び係数 $C_{\mathrm{a}}, C_{\mathrm{p}}$」と「MR 画像 $\boldsymbol{x}$」を交互に更新していくことで，式 (7) の問題を解く．まず MR 画像 $\boldsymbol{x}$ を固定し，パッチ行列 $X := (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_Q) \in \mathbb{C}^{n\times Q}$ を作成する．3.1 節に基づいて，

$$\begin{cases} C_{\mathrm{a}} = H_{\lambda_1}(D_{\mathrm{a}}^{\mathrm{H}} X) \\ D_{\mathrm{a}} = UV^{\mathrm{H}} \qquad (\text{ただし，} XC_{\mathrm{a}}^{\mathrm{H}} = U\Sigma V^{\mathrm{H}}) \end{cases} \tag{17}$$

を条件が満たされるまで繰り返して C_{a} と D_{a} を更新し，

$$C_{\mathrm{p}} = H_{\lambda_2}(D_{\mathrm{p}}^{\mathrm{H}} W F_n X) \tag{18}$$

によって C_{p} を更新する．

次に MR 画像 $\boldsymbol{x}$ を更新する．式 (7) で辞書 D_{a} 及び係数 $C_{\mathrm{a}}, C_{\mathrm{p}}$ を固定すると，$\boldsymbol{x}$ は

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}^* = \underset{\boldsymbol{x}\in\mathbb{C}^N}{\mathrm{argmin}}\ &\frac{\mu}{2\nu}\|F_S\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|_2^2 + \frac{1}{2\nu}\sum_{q=1}^{Q}\|\boldsymbol{x}_q - D_{\mathrm{a}}\mathbf{c}_q^{\mathrm{a}}\|_2^2 \\ &+ \frac{1}{2}\sum_{q=1}^{Q}\|WF_n\boldsymbol{x}_q - D_{\mathrm{p}}\boldsymbol{c}_q^{\mathrm{p}}\|_2^2\end{aligned} \tag{19}$$

のように更新すればよい．式 (19) の最小二乗問題の解 $\boldsymbol{x}^*$ は閉形式で与えられるが，計算が困難となる．そこで本研究では，Fast Iterative Shrinkage-Thresholding Algorithm (FISTA) [14] を用いる．FISTA とは，凸関数 f (勾配が κ リプシッツ連続[2]) と g (近接写像[3]が閉形式) の和の最小解

$$\boldsymbol{x}^* = \underset{\boldsymbol{x}\in\mathbb{C}^N}{\mathrm{argmin}}\ f(\boldsymbol{x}) + g(\boldsymbol{x})$$

を求めるアルゴリズムである．任意の初期値 $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{C}^N$ に対して，$\boldsymbol{\xi}_1 = \boldsymbol{x}_0$ かつ $t_1 = 1$ として，$l \geq 1$ に関して

$$\begin{cases} \boldsymbol{\xi}_l' = \boldsymbol{\xi}_l - \frac{1}{\kappa}\nabla f(\boldsymbol{\xi}_l) \\ \boldsymbol{x}_l = \mathrm{prox}_{\frac{1}{\kappa}g}(\boldsymbol{\xi}_l') \\ t_{l+1} = \frac{1+\sqrt{1+4t_l^2}}{2} \\ \boldsymbol{\xi}_{l+1} = \boldsymbol{x}_l + \frac{t_l - 1}{t_{l+1}}(\boldsymbol{x}_l - \boldsymbol{x}_{l-1}) \end{cases} \tag{20}$$

を繰り返して計算することで，$\boldsymbol{x}^*$ が比較的高速に求まる．

式 (19) において，$f(\boldsymbol{x}) := \frac{1}{2}\sum_{q=1}^{Q}\|WF_n\boldsymbol{x}_q - D_{\mathrm{p}}\boldsymbol{c}_q^{\mathrm{p}}\|_2^2$ かつ $g(\boldsymbol{x}) := \frac{\mu}{2\nu}\|F_S\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|_2^2 + \frac{1}{2\nu}\sum_{q=1}^{Q}\|\boldsymbol{x}_q - D_{\mathrm{a}}\mathbf{c}_q^{\mathrm{a}}\|_2^2$ として FISTA を適用する．すると，式 (20) の第 1 行目は

$$\boldsymbol{\xi}_l' = \boldsymbol{\xi}_l - \frac{1}{\kappa}\sum_{q=1}^{Q} R_q^{\mathrm{T}} F_n^{\mathrm{H}} W (WF_n R_q \boldsymbol{\xi}_l - D_{\mathrm{p}}\boldsymbol{c}_q^{\mathrm{p}})$$

のように計算される．ここで，$R_q \in \{0,1\}^{n\times N}$ はパッチ抽出行列であり，$R_q\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_q$ を満たす．第 2 行目では，$\boldsymbol{x}_l$ のフーリエ係数 $\widehat{\boldsymbol{x}}_l := F\boldsymbol{x}_l$ を用いて近接写像を計算する．各画素がパッチに用いられる回数[4]を m として，

$$\widehat{\boldsymbol{z}} := F\sum_{q=1}^{Q} R_q^{\mathrm{T}} D_{\mathrm{a}} \boldsymbol{c}_q^{\mathrm{a}}$$

及び $\widehat{\boldsymbol{\xi}}_l' := F\boldsymbol{\xi}_l'$ を用いれば，$\widehat{\boldsymbol{x}}_l$ は

$$\widehat{\boldsymbol{x}}_l[j] = \begin{cases} \dfrac{\widehat{\boldsymbol{z}}[j] + \kappa\nu\widehat{\boldsymbol{\xi}}_l'[j]}{m+\kappa\nu} & \text{if } S[i,j] = 0 \text{ for all } i, \\ \dfrac{\mu\boldsymbol{y}[i] + \widehat{\boldsymbol{z}}[j] + \kappa\nu\widehat{\boldsymbol{\xi}}_l'[j]}{\mu+m+\kappa\nu} & \text{if } S[i,j] = 1 \text{ for some } i, \end{cases}$$

のように計算できる．特に $\mu = \infty$ のときは $S[i,j] = 1$ を満たす i と j に対して，$\widehat{\boldsymbol{x}}_l[j] = \boldsymbol{y}[i]$ となる．$\widehat{\boldsymbol{x}}_l$ の計算後，式 (20) の第 2 行目は $\boldsymbol{x}_l = F^{\mathrm{H}}\widehat{\boldsymbol{x}}_l$ にように求まる．式 (20) の第 3 行目，第 4 行目の計算を行い，再び第 1 行目に戻る．上記を繰り返すことで式 (19) の解 $\boldsymbol{x}^*$ を求める．MR 画像更新後，式 (17) と式 (18) に戻り，$D_{\mathrm{a}}, C_{\mathrm{a}}, C_{\mathrm{p}}$ を更新する．

4　シミュレーション

GE Healthcare UK 社製 MRI 装置「SignaHDxt 1.5T」で得られた健常な 20 代男性の頭部画像をシミュレーションに用いた．まず，TR = 12.4 [ms], TE = 5.2 [ms], FOV = 240 [mm] × 240 [mm], Gap = 0, Thickness = 1 [mm] に設定し，8ch Brain Coil を使用して頭部を 156 枚撮像した．学習用画像は No. 90 の MR 画像 (図 1) とし，再構成対象画像は学習用画像から離れたスライスであり，視覚的にも類似していない No. 33 の MR 画像 (図 4(a)) とした．観測には，圧縮率 $\frac{77\times 256}{256^2} \approx 0.3$ のサンプリングマスク (図 2) を用いた．観測信号の逆フーリエ変換結果 (図 3) を初期画像として，提案法と DLMRI [6] 及び Fast DLMRI [7] に

[2] 写像 $\mathcal{T}: \mathbb{C}^N \to \mathbb{C}^N$ が $\forall\boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^N\ \|\mathcal{T}(\boldsymbol{x}) - \mathcal{T}(\boldsymbol{y})\|_2 \leq \kappa\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|_2$ をある実数 κ に関して満たすとき，$\mathcal{T}$ は κ リプシッツ連続であるという．

[3] 下半連続な真凸関数 $g: \mathbb{C}^N \to \mathbb{R}$ の近接写像は $\mathrm{prox}_g: \mathbb{C}^N \to \mathbb{C}^N: \boldsymbol{x} \mapsto \mathrm{argmin}_{\boldsymbol{y}\in\mathbb{C}^N}\ g(\boldsymbol{y}) + \frac{1}{2}\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|_2^2$ と定義される．

[4] 右端の画素と左端の画素を繋げて作られるパッチ，または，下端の画素と上端の画素を繋げて作られるパッチも抽出すると仮定している．

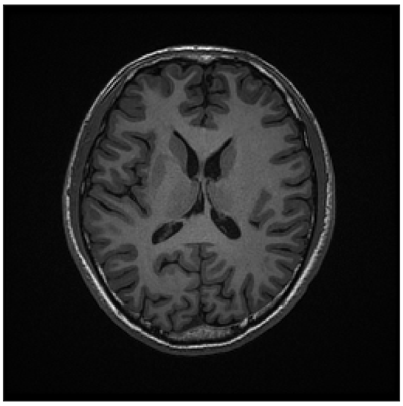


図 1: 学習用 MR 画像 (No. 90)

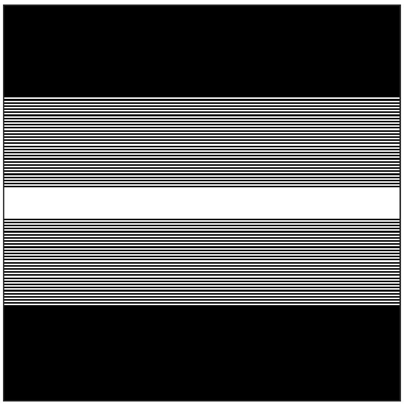


図 2: サンプリングマスク

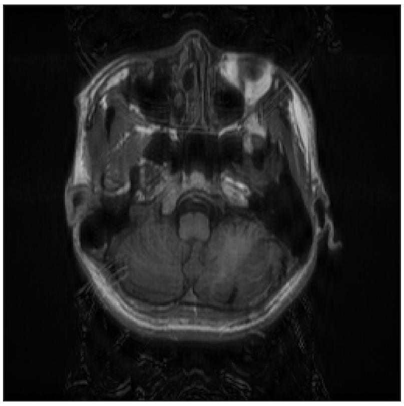


図 3: 観測信号の逆フーリエ変換結果

表 1: シミュレーション結果

検証項目 / 手法	提案法	DLMRI	Fast DLMRI
PSNR	**33.00**	32.75	31.60
SSIM	**0.9470**	0.9390	0.9264
再構成時間 (秒)	5,388	10,517	**708**

よって画像再構成を行う．正則化パラメータ μ は，雑音が $\varepsilon = \mathbf{0}$ であるため $\mu = \infty$ とした．その他のパラメータは，パッチサイズは 4×4 で共通として，DLMRI では $K = 64$, $T = 6$，Fast DLMRI では $\lambda = 0.01$，提案法では $\lambda_1 = 0.01$, $\lambda_2 = 0.0055$, $\nu = 0.00075$, $\kappa = 4700000$ とした．総反復数を 500 とし，PSNR と SSIM，及び再構成時間を評価した．

シミュレーション結果を表 1 に示す．表 1 から，PSNR と SSIM どちらの指標においても，提案法による再構成結果が最も良い値を示している．再構成時間に関しては，提案法では画像更新時に FISTA による繰り返し計算を用いるため，Fast DLMRI より多くの時間を必要とする．一方で，適応辞書学習時に K-SVD を用いる DLMRI と比較すると，再構成時間は半減している．図 4 にそれぞれの手法により再構成された MR 画像の振幅を示す．また，図 5 に図 4 の中央下部の拡大図を示す．図 4 から，提案法による再構成結果 (図 4(b)) は DLMRI の結果 (図 4(c)) と比べてアーチファクトの誤学習が少なく，Fast DLMRI の結果 (図 4(d)) と比べてぼやけている箇所が少ない．図 5 から，提案法が細部構造を最も良く復元していることも確認できる．

5 おわりに

本研究では，適応型と事前型の 2 つの直交辞書を用いる MR 画像再構成を提案した．提案法は，対象画像の低周波成分を適応辞書で学習し，それに事前辞書で学習済みの高周波成分を組み合わせることで，MR 画像を高精度に再構成する．数値実験によって，適応辞書のみを用いる従来法に比べて，提案法は細部構造がより復元された高品質な MR 画像を再構成できることを確認した．

参考文献

[1] S. W. Young, *Nuclear Magnetic Resonance Imaging: Basic Principles*. New York: Raven Press, 1984.

[2] P. G. Morris, *Nuclear Magnetic Resonance Imaging in Medicine and Biology*. Oxford: Clarendon Press, 1986.

[3] D. J. Brenner and E. J. Hall, “Computed tomography—An increasing source of radiation exposure,” *New Engl. J. Med.*, vol. 357, no. 22, pp. 2277–2284, 2007.

[4] M. Lustig, D. L. Donoho, and J. M. Pauly, “Sparse MRI: The application of compressed sensing for rapid MR imaging,” *Magnet. Reson. Med.*, vol. 58, no. 6, pp. 1182–1195, 2007.

[5] Y. Chen, X. Ye, and F. Huang, “A novel method and fast algorithm for MR image reconstruction with significantly undersampled data,” *Inv. Prob. Imag.*, vol. 4, no. 2, pp. 223–240, 2010.

[6] S. Ravishankar and Y. Bresler, “MR image reconstruction from highly undersampled k-space data by dictionary learning,” *IEEE Trans. Med. Imag.*, vol. 30, no. 5, pp. 1028–1041, 2011.

[7] J. Huang, L. Guo, Q. Feng, W. Chen, and Y. Feng, “Sparsity-promoting orthogonal dictionary updating for image reconstruction from highly undersampled magnetic resonance data,” *Phys. Med. Biol.*, vol. 60, no. 14, pp. 5359–5380, 2015.

[8] A. Hirabayashi, N. Inamuro, K. Mimura, T. Kurihara, and T. Homma, “Compressed sensing MRI using sparsity induced from adjacent slice similarity,” in *Proc. Int. Conf. Sampl. Theory Appl. (SampTA)*, 2015, pp. 287–291.

[9] D. L. Donoho, “Compressed sensing,” *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. 52, no. 4, pp. 1289–1306, 2006.

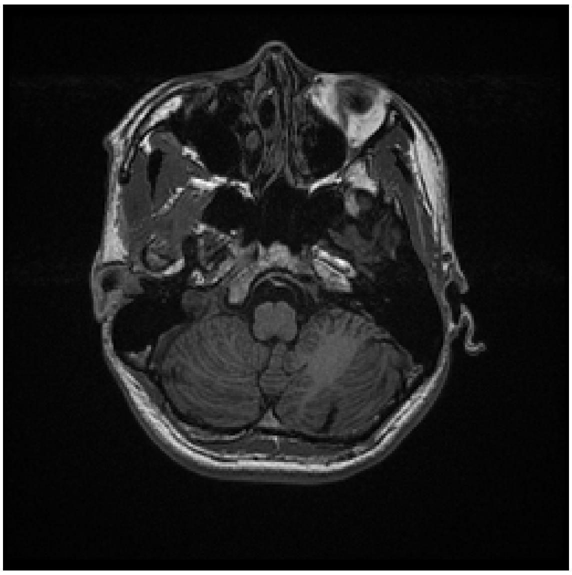
[10] K. Engan, S. O. Aase, and J. H. Husøy, “Method of optimal directions for frame design,” in *Proc. IEEE Int. Conf. Acoust. Speech Signal Process. (ICASSP)*, 1999, pp. 2443–2446.

[11] M. Aharon, M. Elad, and A. M. Bruckstein, “K-SVD: An algorithm for designing overcomplete dictionaries for sparse representation,” *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 54, no. 11, pp. 4311–4322, 2006.

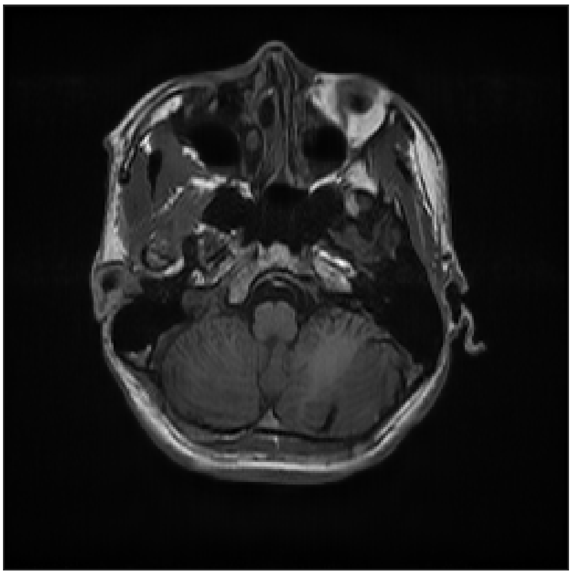
[12] C. Bao, J. F. Cai, and H. Ji, “Fast sparsity-based orthogonal dictionary learning for image restoration,” in *Proc. IEEE Int. Conf. Comp. Vis. (ICCV)*, 2013, pp. 3384–3391.

[13] Y. C. Pati, R. Rezaiifar, and P. S. Krishnaprasad, “Orthogonal matching pursuit: Recursive function approximation with applications to wavelet decomposition,” in *Proc. Asilomar Conf. Sig. Sys. Comp.*, 1993, pp. 40–44.

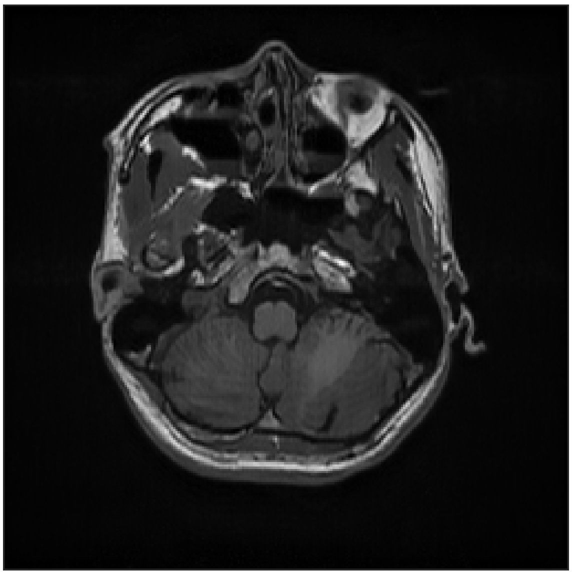
[14] A. Beck and M. Teboulle, “A fast iterative shrinkage-thresholding algorithm for linear inverse problems,” *SIAM J. Imag. Sci.*, vol. 2, no. 1, pp. 182–202, 2009.



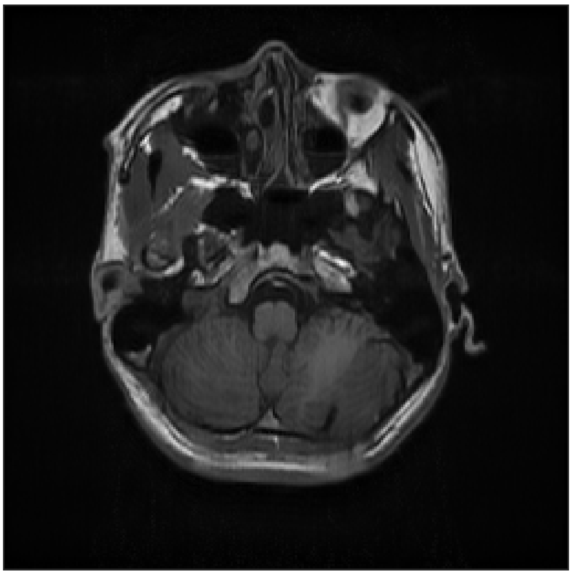
(a) 真の強度画像



(b) 提案法による再構成結果

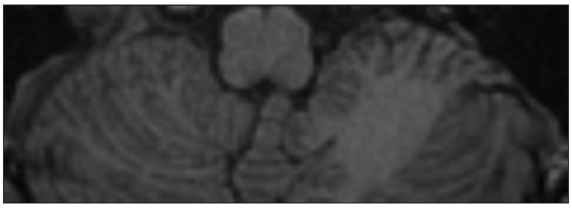


(c) DLMRI による再構成結果

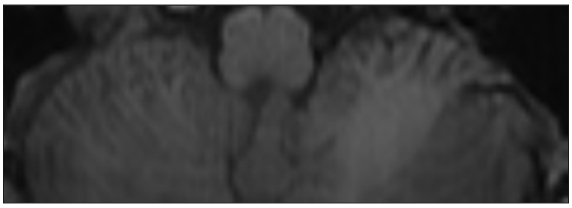


(d) Fast DLMRI による再構成結果

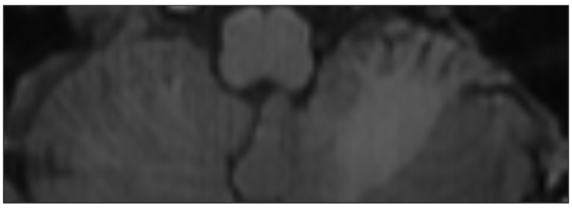
図 4: 圧縮率 0.3 の観測信号からの MR 画像再構成 (No. 33)



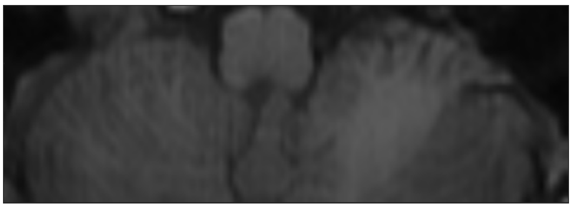
(a) 真の強度画像



(b) 提案法による再構成結果



(c) DLMRI による再構成結果



(d) Fast DLMRI による再構成結果

図 5: 図 4 の再構成結果の拡大図