第 8 回横幹連合コンファレンス
2017.12.2-3 立命館大学 朱雀キャンパス

レベル集合制約を用いた圧縮センシングMRI

○柴田 基　 北原 大地　 平林 晃　（立命館大学）

Compressed Sensing MRI with Level Set Constraints

$*$M. Shibata, D. Kitahara, A. Hirabayashi (Ritsumeikan University)

Abstract– CS-MRI is a high-speed magnetic resonance imaging technique based on compressed sensing theory. It is known that the utilization of dictionary learning (DL) for CS-MRI leads to better image reconstruction results. In the optimization problem adopted by the DL-based CS-MRI, we must appropriately adjust the weights of data fidelity term and dictionary fidelity term, respectively, for each MR image. In this paper, we formulate a novel optimization problem where the above two fidelities are expressed as level set constraints, and solve this optimization problem by using alternating direction method of multipliers (ADMM). Numerical experiments show that the proposed method can reconstruct several MR images with high accuracy by using the same parameters.

Index terms– CS-MRI, dictionary learning, level set constraints, convex optimization

1 はじめに

磁気共鳴画像法 (Magnetic Resonance Imaging: MRI) は強力な磁場を発生させて生体の内部構造を撮像する手法である [1,2]．X 線を利用するコンピュータ断層撮影法 (Computed Tomography: CT) [3,4] と比べて，MRI には放射線被曝を伴わないという利点がある．MRI は断面画像の離散フーリエ係数を観測するため，1 回の撮像に 20 分から 30 分程度かかることがある．この長い撮像時間が被験者の大きな負担となるだけでなく，心臓等の常に動く部位の画質劣化原因ともなっている [7]．

この問題を解決するために，圧縮センシング (Compressed Sensing: CS) [5,6] を利用して MRI の撮像時間を短縮する手法が注目されている [7,8]．圧縮センシング MRI (CS-MRI) と総称されるこれらの手法では，一部のフーリエ係数のみを観測することで撮像時間を短縮し，ある種の最適化問題を解くことで，観測した一部のフーリエ係数から画像を再構成している．

MR 画像再構成の際に用いられる最適化問題として，Lustig らは「観測信号との整合性」,「離散ウェーブレット変換後のスパース性」および「隣接画素間の類似性」を考慮に入れた評価関数の最小化問題を提案した [7]．この手法では，圧縮率が 1/3 程度の観測においては画像が高精度に再構成されるが，それより高い圧縮率の観測においては再構成結果が著しく劣化してしまう問題があった．この主な原因は，離散ウェーブレット基底では再構成対象画像を十分スパースに表現できていないことである．

高圧縮率の観測信号からも良好な再構成結果を得るために，Chen らは辞書学習を用いる手法を提案した [8]．まず，事前に時間をかけて撮像した高品質な MR 画像を学習用データとして使い，MR 画像をスパースに表現できる基底またはフレーム (辞書という) を生成する．次に，対象画像が辞書によってスパースに表現可能なことを考慮した評価関数を最小化することで，Lustig らの手法より高精度に画像を再構成できる．しかし，良好な再構成結果を得るには，評価関数内の「観測信号との整合性」と「辞書との整合性」の重みを画像や圧縮率ごとに適切に設定する必要がある．

そこで本稿では，上記 2 つの整合性を不等式 (レベル集合) 制約とした最適化問題を解く再構成手法を提案する．提案法では，整合性に関する 2 つのパラメータが「雑音の大きさ」と「辞書によるスパース表現の正確さ」をそのまま表しているため，雑音レベルが一定で辞書が MR 画像を適切に表現できるのであれば，画像や圧縮率が異なる観測信号に対してもパラメータの最適値はほぼ変化しないと考えられえる．また，最適化問題の解法に交互方向乗数法 (Alternating Direction Method of Multipliers: ADMM) [9] を用いることで，比較的高速に厳密解を求めることができる．実データを用いた数値実験において，提案法は異なる観測信号に対して同じパラメータ設定を用いた場合にも，MR 画像を高精度に再構成できることを確認している．

2 数学的準備

正の整数全体，実数全体，複素数全体の集合をそれぞれ $\mathbb{N}$，$\mathbb{R}$，$\mathbb{C}$ で表す．ボールド体の小文字でベクトルを表し，大文字で行列を表す．ベクトル $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^N$ の第 i 成分を $\boldsymbol{x}[i]$ で表し，行列 $X \in \mathbb{C}^{M\times N}$ の第 (i,j) 成分を $X[i,j]$ で表す．ベクトル $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^N$ の ℓ_2 ノルムを $\|\boldsymbol{x}\|_2 := \sqrt{\sum_{i=1}^N |\boldsymbol{x}[i]|^2}$，$\ell_1$ ノルムを $\|\boldsymbol{x}\|_1 := \sum_{i=1}^N |\boldsymbol{x}[i]|$ と定義し，ℓ_0 擬ノルム $\|\boldsymbol{x}\|_0$ の値を $\boldsymbol{x}$ の非零成分数と定義する．また，$N = GQ$ を満たす正の整数 G と Q を用い，$\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^N$ のグループ ℓ_1 ノルムを $\|\boldsymbol{x}\|_{1,2}^{G,Q} := \sum_{i=1}^G \|\boldsymbol{x}_{\mathfrak{g}_i}\|_2 := \sum_{i=1}^G \sqrt{\sum_{j=0}^{Q-1} |\boldsymbol{x}[i+jG]|^2}$ のように定義する．

2.1 圧縮センシング MRI (CS-MRI)

CS-MRI において，観測信号 $\boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^N$ は

$$\boldsymbol{y} = U(F\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\varepsilon}) = F_U\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\varepsilon}_U \qquad (1)$$

と表される．ここで，$\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^N$ はサイズ $\sqrt{N}\times\sqrt{N}$ の MR 画像，ユニタリ行列 $F \in \mathbb{C}^{N\times N}$ は 2 次元フーリエ変換，対角行列 $U \in \{0,1\}^{N\times N}$ はアンダーサンプリング，$\boldsymbol{\varepsilon} \in \mathbb{C}^N$ は雑音を表し，$F_U := UF$ かつ $\boldsymbol{\varepsilon}_U := U\boldsymbol{\varepsilon}$ である．また，観測信号の圧縮率は $\frac{1}{N}\sum_{k=1}^N U[k,k]$ と表される．CS-MRI における「MR 画像再構成」とは，式 (1) の $\boldsymbol{y}$ と F_U から $\boldsymbol{x}$ を推定するプロセスのことである．

CS-MRI 研究の原点として，Lustig らは凸最適化問題

$$\underset{\boldsymbol{x}}{\text{minimize}}\ \mu\|F_U\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|_2^2 + \|\Psi\boldsymbol{x}\|_1 + \lambda\mathrm{TV}_1(\boldsymbol{x}) \qquad (2)$$

を解くことで MR 画像を再構成する手法を提案した [7]．

ここで，$\Psi \in \mathbb{C}^{N\times N}$ は離散ウェーブレット変換，TV_1 は非等方性全変動 (anisotropic total variation) であり，$\Delta := (\Delta_H^T, \Delta_V^T)^T \in \mathbb{R}^{2N\times N}$ を用いて，$\mathrm{TV}_1(\boldsymbol{x}) := \|\Delta \boldsymbol{x}\|_1$ と定義される．$\Delta_H \in \mathbb{R}^{N\times N}$ と $\Delta_V \in \mathbb{R}^{N\times N}$ はそれぞれ水平方向と垂直方向の差分行列を表しており，右端の画素値と左端の画素値の差分，および，下端の画素値と上端の画素値の差分も計算している．$\mu > 0$ と $\lambda > 0$ は評価関数内の各項の重みを決定するパラメータである．この手法は，圧縮率が 1/3 程度までならば MR 画像を高精度に再構成できる．

より高い圧縮率の観測信号からも良好な再構成結果を得るために，Chen らはパッチベースの辞書を用いる手法を提案した [8]．まず，事前に時間をかけて撮像した高品質な MR 画像をサイズ $\sqrt{n} \times \sqrt{n}$ の小さなパッチ $\boldsymbol{z}_p \in \mathbb{C}^n$ $(p = 1, 2, \ldots, P)$ に分割し，NP 困難な最適化問題

$$\underset{D,\{\boldsymbol{c}_p\}}{\text{minimize}} \sum_{p=1}^{P} \|\boldsymbol{z}_p - D\boldsymbol{c}_p\|_2^2 \quad \text{s.t. } \forall p\ \|\boldsymbol{c}_p\|_0 \le T_c \tag{3}$$

の近似解として辞書 $\bar{D} \in \mathbb{C}^{n\times K}$ を作成する．ここで，$\boldsymbol{c}_p \in \mathbb{C}^K$ はパッチ $\boldsymbol{z}_p$ の辞書 D によるスパース表現，$T_c \in \mathbb{N}$ は所望のスパースレベルを表す．式 (3) の問題の近似解は MOD [10] や K-SVD [11] 等のアルゴリズムにより求まる．次に，作成した事前辞書 $\bar{D}$ に基づいた凸最適化問題

$$\underset{\boldsymbol{x},\{\boldsymbol{c}_{i,j}\}}{\text{minimize}} \Big[\mu\|F_U\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|_2^2 + \nu\sum_{i,j}\|\boldsymbol{x}_{i,j} - \bar{D}\boldsymbol{c}_{i,j}\|_2^2 + \sum_{i,j}\|\boldsymbol{c}_{i,j}\|_1 + \lambda \mathrm{TV}_2(\boldsymbol{x})\Big] \tag{4}$$

を解くことで MR 画像を再構成する．ここで，$\boldsymbol{x}_{i,j} \in \mathbb{C}^n$ は $\boldsymbol{x}$ の画素 (i,j) を左上端の画素とする $\sqrt{n} \times \sqrt{n}$ のパッチ，$\boldsymbol{c}_{i,j} \in \mathbb{C}^K$ は辞書 $\bar{D}$ によるスパース表現であり，差分値の計算と同様に，右端の画素と左端の画素，または，下端の画素と上端の画素を繋げて作られるパッチも考慮する．TV_2 は等方性全変動 (isotropic total variation) であり，行列 Δ を用いて $\mathrm{TV}_2(\boldsymbol{x}) := \|\Delta\boldsymbol{x}\|_{1,2}^{N,2}$ と定義される．$\nu > 0$ は各パッチと辞書との整合性に関する重みを決定するパラメータである．

2.2 交互方向乗数法 (ADMM)

以下の凸最適化問題を考える．

$$\underset{\boldsymbol{x}\in\mathbb{C}^N,\,\boldsymbol{z}\in\mathbb{C}^M}{\text{minimize}}\ f(\boldsymbol{x}) + g(\boldsymbol{z}) \quad \text{s.t. } \boldsymbol{z} = L\boldsymbol{x}. \tag{5}$$

ここで，$f : \mathbb{C}^N \to \mathbb{R}\cup\{\infty\}$ と $g : \mathbb{C}^M \to \mathbb{R}\cup\{\infty\}$ は下半連続な真凸関数[1]であり，$L \in \mathbb{C}^{M\times N}$ である[2]．

[1]任意の $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して，関数 $f : \mathbb{C}^N \to \mathbb{R}\cup\{\infty\}$ のレベル集合 $\mathrm{lev}_{\le\alpha}(f) := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^N \mid f(\boldsymbol{x}) \le \alpha\}$ が閉集合となるとき，f は下半連続であるという．また，$\mathrm{dom}(f) := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^N \mid f(\boldsymbol{x}) < \infty\} \neq \varnothing$ かつ，任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^N$ と $\lambda \in (0,1)$ に対して，$f(\lambda\boldsymbol{x} + (1-\lambda)\boldsymbol{y}) \le \lambda f(\boldsymbol{x}) + (1-\lambda)f(\boldsymbol{y})$ を満たすとき，f は真凸関数であるという．

[2]行列 $L^H L$ の逆行列 $(L^H L)^{-1}$ が存在すると仮定している．

ADMM [9] は任意の初期値 $(\boldsymbol{z}^{(0)}, \boldsymbol{\xi}^{(0)}) \in \mathbb{C}^M \times \mathbb{C}^M$ から

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}^{(t+1)} = \underset{\boldsymbol{x}\in\mathbb{C}^N}{\mathrm{argmin}}\ f(\boldsymbol{x}) + \dfrac{1}{2\gamma}\|\boldsymbol{z}^{(t)} - L\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi}^{(t)}\|_2^2 \\ \boldsymbol{z}^{(t+1)} = \mathrm{prox}_{\gamma g}(L\boldsymbol{x}^{(t+1)} + \boldsymbol{\xi}^{(t)}) \\ \boldsymbol{\xi}^{(t+1)} = \boldsymbol{\xi}^{(t)} + L\boldsymbol{x}^{(t+1)} - \boldsymbol{z}^{(t+1)} \end{cases} \tag{6}$$

を計算することで，式 (5) の問題の解を逐次近似するアルゴリズムである．$\mathrm{prox}_{\gamma g} : \mathbb{C}^M \to \mathbb{C}^M$ は凸関数 γg の近接写像 (proximity operator) [12] であり，任意の実数 $\gamma > 0$ に対して，

$$\mathrm{prox}_{\gamma g}(\boldsymbol{z}) := \underset{\boldsymbol{y}\in\mathbb{C}^M}{\mathrm{argmin}}\ g(\boldsymbol{y}) + \frac{1}{2\gamma}\|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{z}\|_2^2.$$

と定義される[3]．

例えば g が ℓ_1 ノルムであるとき，$g(\boldsymbol{y}) + \frac{1}{2\gamma}\|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{z}\|_2^2 = \sum_{i=1}^{M}(|\boldsymbol{z}[i]| + \frac{1}{2\gamma}|\boldsymbol{y}[i] - \boldsymbol{z}[i]|^2)$ となり各成分ごとの計算に分離できる．したがって，凸関数 $\gamma|\cdot|$ の近接写像

$$\mathrm{prox}_{\gamma|\cdot|}(\boldsymbol{z}[i]) = \begin{cases} \dfrac{|\boldsymbol{z}[i]| - \gamma}{|\boldsymbol{z}[i]|}\boldsymbol{z}[i] & \text{if } |\boldsymbol{z}[i]| > \gamma, \\ 0 & \text{if } |\boldsymbol{z}[i]| \le \gamma, \end{cases} \tag{7}$$

を用いることで

$$\mathrm{prox}_{\gamma\|\cdot\|_1}(\boldsymbol{z}) = \begin{pmatrix} \mathrm{prox}_{\gamma|\cdot|}(\boldsymbol{z}[1]) \\ \mathrm{prox}_{\gamma|\cdot|}(\boldsymbol{z}[2]) \\ \vdots \\ \mathrm{prox}_{\gamma|\cdot|}(\boldsymbol{z}[M]) \end{pmatrix}$$

が計算される．g がグループ ℓ_1 ノルムであるときは，$g(\boldsymbol{y}) + \frac{1}{2\gamma}\|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{z}\|_2^2 = \sum_{i=1}^{G}(\|\boldsymbol{y}_{\mathfrak{g}_i}\|_2 + \frac{1}{2\gamma}\|\boldsymbol{y}_{\mathfrak{g}_i} - \boldsymbol{z}_{\mathfrak{g}_i}\|_2^2)$ となり各グループごとの計算に分離できる．したがって，凸関数 $\gamma\|\cdot\|_2$ の近接写像

$$\mathrm{prox}_{\gamma\|\cdot\|_2}(\boldsymbol{z}_{\mathfrak{g}_i}) = \begin{cases} \dfrac{\|\boldsymbol{z}_{\mathfrak{g}_i}\|_2 - \gamma}{\|\boldsymbol{z}_{\mathfrak{g}_i}\|_2}\boldsymbol{z}_{\mathfrak{g}_i} & \text{if } \|\boldsymbol{z}_{\mathfrak{g}_i}\|_2 > \gamma, \\ \boldsymbol{0} & \text{if } \|\boldsymbol{z}_{\mathfrak{g}_i}\|_2 \le \gamma, \end{cases} \tag{8}$$

を用いることで $\mathrm{prox}_{\gamma\|\cdot\|_{1,2}^{G,Q}}(\boldsymbol{z})$ が計算される．

3 パラメータ設定に頑健な MR 画像再構成

3.1 レベル集合制約を用いた最適化問題

式 (2) や式 (4) の最適化問題では，良好な再構成結果が得られるように，パラメータ μ，ν，λ の値を慎重に調節する必要がある．これらのパラメータの最適値は対象画像や圧縮率，或いは U の選択パターン (マスクという) に応じて変わるため，同一のパラメータ設定では，異なる観測信号から良好な再構成結果を安定して得ることは困難である．そこで本研究では，2 つの整合性項を不等式 (レベル集合) 制約とした凸最適化問題

$$\underset{\boldsymbol{x},\{\boldsymbol{c}_{i,j}\}}{\text{minimize}} \sum_{i,j}\|\boldsymbol{c}_{i,j}\|_1 + \lambda\mathrm{TV}_l(\boldsymbol{x})$$
$$\text{s.t. } \|F_U\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|_2 \le \epsilon \text{ and } \forall i,j\ \|\boldsymbol{x}_{i,j} - \bar{D}\boldsymbol{c}_{i,j}\|_2 \le \delta \tag{9}$$

[3]写像先 (最小解) の存在性および一意性は，第 2 項 $\frac{1}{2\gamma}\|\cdot - \boldsymbol{z}\|_2^2$ の狭義凸性により保証される．

を解くことによりMR画像を再構成する手法を提案する．ここで，$l=1$ または $l=2$，$\epsilon \geq 0$ かつ $\delta \geq 0$ である．

式 (2) や式 (4) は，式 (9) の問題のラグランジュ関数の特殊例とも解釈できる．実際に，パッチを画像全体 (つまり $\boldsymbol{x}_{i,j}=\boldsymbol{x}$) と考え，$\delta=0$，$\bar{D}=\Psi^{-1}$ とすれば式 (2) が導出され，辞書との整合性項 $\|\boldsymbol{x}_{i,j}-\bar{D}\boldsymbol{c}_{i,j}\|_2$ に関するラグランジュ乗数を全て同一の値に揃えれば式 (4) が導出される．式 (9) の問題では，整合性に関する 2 つのパラメータ ϵ と δ が，それぞれ「雑音の大きさ」と「辞書によるスパース表現の正確さ」を表している．このため,「雑音レベルが一定」かつ「辞書がMR画像を適切に表現できる」ならば，パラメータの最適値は対象画像や圧縮率に大きく依存しないことが期待される．

3.2 ADMM による解法

式 (9) の問題を ADMM により解くために，評価関数を変形する．ベクトル $\boldsymbol{c}_{i,j}$ を全ての i,j に関して連結してできるベクトルを $\boldsymbol{c}$ で表し，変数分離のために $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{c}$ を用意する．また，$\boldsymbol{\beta}=\Delta\boldsymbol{x}$ とおく．パッチ抽出行列 $R_{i,j}\in\{0,1\}^{n\times N}$ を用いれば $\boldsymbol{x}_{i,j}=R_{i,j}\boldsymbol{x}$ であり，変数分離のために $\boldsymbol{u}_{i,j}=\boldsymbol{x}_{i,j}$ とおく．さらに，$\boldsymbol{v}_{i,j}=\bar{D}\boldsymbol{c}_{i,j}$ を用意する．全ての i,j に関して $\boldsymbol{u}_{i,j}$，$\boldsymbol{v}_{i,j}$ を連結してできるベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{v}$ で表し，$\boldsymbol{z}=(\boldsymbol{\alpha}^T,\boldsymbol{\beta}^T,\boldsymbol{u}^T,\boldsymbol{v}^T)^T$ とおけば，適切に定義した行列 L を用いて $\boldsymbol{z}=L(\boldsymbol{x}^T,\boldsymbol{c}^T)^T$ と表される．指示関数

$$\iota_\epsilon(\boldsymbol{x}):=\begin{cases}0 & \text{if } \|UF\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|_2\leq\epsilon,\\ \infty & \text{if } \|UF\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|_2>\epsilon,\end{cases}$$

$$\iota_\delta(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}):=\begin{cases}0 & \text{if } \|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}\|_2\leq\delta,\\ \infty & \text{if } \|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}\|_2>\delta,\end{cases}$$

を用いて，下半連続な真凸関数 f と g を

$$f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{c}):=\iota_\epsilon(\boldsymbol{x})$$

$$g(\boldsymbol{z}):=\|\boldsymbol{\alpha}\|_1+\lambda\|\boldsymbol{\beta}\|_{1,2}^{N,2}+\sum_{i,j}\iota_\delta(\boldsymbol{u}_{i,j},\boldsymbol{v}_{i,j})$$

のように定義すれば，式 (9) の問題は

$$\underset{\boldsymbol{x},\boldsymbol{c},\boldsymbol{z}}{\text{minimize}}\ f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{c})+g(\boldsymbol{z}) \quad \text{s.t. } \boldsymbol{z}=L(\boldsymbol{x}^T,\boldsymbol{c}^T)^T \tag{10}$$

と等価になる[4]．以下では，式 (10) の表現に基づいて ADMM による解法を導出する．

まず，式 (6) の 1 行目に関して，画像 $\boldsymbol{x}$ はフーリエ係数 $\widehat{\boldsymbol{x}}:=F\boldsymbol{x}$ を通して更新される．

$$\boldsymbol{s}^{(t)}:=F\left(\Delta^T(\boldsymbol{\beta}^{(t)}-\boldsymbol{\xi}_\beta^{(t)})+\sum_{i,j}R_{i,j}^T(\boldsymbol{u}_{i,j}^{(t)}-\boldsymbol{\xi}_{u_{i,j}}^{(t)})\right)$$

と定義すると，$\|U(\widehat{\Delta}+mI_N)^{-1}\boldsymbol{s}^{(t)}-\boldsymbol{y}\|_2\leq\epsilon$ のとき，$\widehat{\boldsymbol{x}}^{(t+1)}=(\widehat{\Delta}+mI_N)^{-1}\boldsymbol{s}^{(t)}$ のように更新される．ここで，$\widehat{\Delta}:=F\Delta^T\Delta F^H=F\Delta_H^T\Delta_H F^H+F\Delta_V^T\Delta_V F^H\in\mathbb{R}^{N\times N}$ は対角行列となり，$I_N\in\mathbb{R}^{N\times N}$ は N 次の単位行列，$m\in\mathbb{N}$ は各画素がパッチに用いられる回数である．$\|U(\widehat{\Delta}+mI_N)^{-1}\boldsymbol{s}^{(t)}-\boldsymbol{y}\|_2>\epsilon$ のときは，

$$\widehat{\boldsymbol{x}}^{(t+1)}[k]=\begin{cases}\dfrac{\boldsymbol{s}^{(t)}[k]}{\widehat{\Delta}[k,k]+m} & \text{if } U[k,k]=0,\\[2ex] \dfrac{\boldsymbol{s}^{(t)}[k]+\zeta^{(t)}\boldsymbol{y}[k]}{\widehat{\Delta}[k,k]+m+\zeta^{(t)}} & \text{if } U[k,k]=1,\end{cases} \tag{11}$$

と更新される．式 (11) 内の $\zeta^{(t)}>0$ は

$$\sum_{k \text{ s.t. } U[k,k]=1}\left|\frac{\boldsymbol{s}^{(t)}[k]-(\widehat{\Delta}[k,k]+m)\boldsymbol{y}[k]}{\widehat{\Delta}[k,k]+m+\zeta^{(t)}}\right|^2=\epsilon^2$$

を満たす値[5]であり，特に $\epsilon=0$ のときは，$\zeta^{(t)}=\infty$ から $U[k,k]=1$ を満たす k に対して，$\widehat{\boldsymbol{x}}^{(t+1)}[k]=\boldsymbol{y}[k]$ となる．$\widehat{\boldsymbol{x}}$ の更新後，MR 画像は $\boldsymbol{x}^{(t+1)}=F^H\widehat{\boldsymbol{x}}^{(t+1)}$ によって計算される．スパース表現 $\boldsymbol{c}$ はパッチの表現 $\boldsymbol{c}_{i,j}$ ごとに，

$$\boldsymbol{c}_{i,j}^{(t+1)}=(I_K+\bar{D}^H\bar{D})^{-1}\left(\boldsymbol{\alpha}_{i,j}^{(t)}-\boldsymbol{\xi}_{\alpha_{i,j}}^{(t)}+\bar{D}^H(\boldsymbol{v}_{i,j}^{(t)}-\boldsymbol{\xi}_{v_{i,j}}^{(t)})\right) \tag{12}$$

と更新される．実際には，レベル集合への収束速度の向上を考えて，$\boldsymbol{s}^{(t)}$，$\widehat{\boldsymbol{x}}^{(t+1)}$，$\boldsymbol{c}_{i,j}^{(t+1)}$ を計算する際に，$R_{i,j}^T(\boldsymbol{u}_{i,j}^{(t)}-\boldsymbol{\xi}_{u_{i,j}}^{(t)})$，$m$，$\bar{D}^H\bar{D}$，$\bar{D}^H(\boldsymbol{v}_{i,j}^{(t)}-\boldsymbol{\xi}_{v_{i,j}}^{(t)})$ の値を $\eta\in\mathbb{N}$ 倍するとよい (数値実験では，$\eta=20$ とした)．

次に，式 (6) の 2 行目に関して，$\boldsymbol{\alpha}$ と $\boldsymbol{\beta}$ は

$$\begin{cases}\boldsymbol{\alpha}^{(t+1)}=\mathrm{prox}_{\gamma\|\cdot\|_1}(\boldsymbol{c}^{(t+1)}+\boldsymbol{\xi}_\alpha^{(t)})\\ \boldsymbol{\beta}^{(t+1)}=\mathrm{prox}_{\gamma\lambda\|\cdot\|_{1,2}^{N,2}}(\Delta\boldsymbol{x}^{(t+1)}+\boldsymbol{\xi}_\beta^{(t)})\end{cases} \tag{13}$$

のように更新される (式 (7) と式 (8) を用いる)．また，$\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{v}$ は，$e_{i,j}^{(t)}:=\|\boldsymbol{x}_{i,j}^{(t+1)}+\boldsymbol{\xi}_{u_{i,j}}^{(t)}-(\bar{D}\boldsymbol{c}_{i,j}^{(t+1)}+\boldsymbol{\xi}_{v_{i,j}}^{(t)})\|_2$ を定義すると，$e_{i,j}^{(t)}\leq\delta$ のとき，$\boldsymbol{u}_{i,j}^{(t+1)}=\boldsymbol{x}_{i,j}^{(t+1)}+\boldsymbol{\xi}_{u_{i,j}}^{(t)}$，$\boldsymbol{v}_{i,j}^{(t+1)}=\bar{D}\boldsymbol{c}_{i,j}^{(t+1)}+\boldsymbol{\xi}_{v_{i,j}}^{(t)}$ と更新され，$e_{i,j}^{(t)}>\delta$ のときは，

$$\begin{cases}\boldsymbol{u}_{i,j}^{(t+1)}=\frac{e_{i,j}^{(t)}+\delta}{2e_{i,j}^{(t)}}(\boldsymbol{x}_{i,j}^{(t+1)}+\boldsymbol{\xi}_{u_{i,j}}^{(t)})+\frac{e_{i,j}^{(t)}-\delta}{2e_{i,j}^{(t)}}(\bar{D}\boldsymbol{c}_{i,j}^{(t+1)}+\boldsymbol{\xi}_{v_{i,j}}^{(t)})\\ \boldsymbol{v}_{i,j}^{(t+1)}=\frac{e_{i,j}^{(t)}-\delta}{2e_{i,j}^{(t)}}(\boldsymbol{x}_{i,j}^{(t+1)}+\boldsymbol{\xi}_{u_{i,j}}^{(t)})+\frac{e_{i,j}^{(t)}+\delta}{2e_{i,j}^{(t)}}(\bar{D}\boldsymbol{c}_{i,j}^{(t+1)}+\boldsymbol{\xi}_{v_{i,j}}^{(t)})\end{cases} \tag{14}$$

と更新される．

最後に，式 (6) の 3 行目に相当する部分として，

$$\begin{cases}\boldsymbol{\xi}_\alpha^{(t+1)}=\boldsymbol{\xi}_\alpha^{(t)}+\boldsymbol{c}^{(t+1)}-\boldsymbol{\alpha}^{(t+1)}\\ \boldsymbol{\xi}_\beta^{(t+1)}=\boldsymbol{\xi}_\beta^{(t)}+\Delta\boldsymbol{x}^{(t+1)}-\boldsymbol{\beta}^{(t+1)}\\ \boldsymbol{\xi}_{u_{i,j}}^{(t+1)}=\boldsymbol{\xi}_{u_{i,j}}^{(t)}+\boldsymbol{x}_{i,j}^{(t+1)}-\boldsymbol{u}_{i,j}^{(t+1)}\\ \boldsymbol{\xi}_{v_{i,j}}^{(t+1)}=\boldsymbol{\xi}_{v_{i,j}}^{(t)}+D\boldsymbol{c}_{i,j}^{(t+1)}-\boldsymbol{v}_{i,j}^{(t+1)}\end{cases} \tag{15}$$

を計算する．式 (11)–(15) を収束条件が満たされるまで繰り返すことで，式 (10) の問題の最適解を求める．

[4] ここでは $l=2$ としている．$l=1$ の場合は $\lambda\|\boldsymbol{\beta}\|_{1,2}^{N,2}$ を $\lambda\|\boldsymbol{\beta}\|_1$ で置き換えればよい．

[5] $\zeta^{(t)}$ の値は，ニュートン法などにより高速に求まると考えられる．

Table 1: シミュレーション結果

圧縮率 / 画像 No.		10	20	30	40	50	平均値
1/4	提案法	34.27 [dB]	33.65 [dB]	29.53 [dB]	31.15 [dB]	31.10 [dB]	31.94 [dB]
	従来法	32.83 [dB]	33.26 [dB]	28.26 [dB]	30.38 [dB]	31.14 [dB]	31.17 [dB]
1/5	提案法	34.22 [dB]	34.12 [dB]	31.18 [dB]	29.27 [dB]	30.41 [dB]	31.84 [dB]
	従来法	31.95 [dB]	30.94 [dB]	28.14 [dB]	24.47 [dB]	25.65 [dB]	28.23 [dB]
1/6	提案法	31.28 [dB]	32.83 [dB]	28.99 [dB]	29.06 [dB]	29.71 [dB]	30.37 [dB]
	従来法	30.70 [dB]	31.02 [dB]	27.17 [dB]	28.37 [dB]	28.81 [dB]	29.21 [dB]
平均値	提案法	33.26 [dB]	33.53 [dB]	29.90 [dB]	29.83 [dB]	30.41 [dB]	31.38 [dB]
	従来法	31.83 [dB]	31.74 [dB]	27.86 [dB]	27.74 [dB]	28.53 [dB]	29.54 [dB]

4 シミュレーション

GE Healthcare UK 社製 MRI 装置「SignaHDxt 1.5T」によって撮像された MR 画像を用いてシミュレーションを行う．まず，$\mathrm{TR} = 12.4$ [ms]，$\mathrm{TE} = 5.2$ [ms]，$\mathrm{FOV} = 240$ [mm] $\times$ 240 [mm]，$\mathrm{Gap} = 0$，$\mathrm{Thickness} = 1$ [mm] に設定し，8ch Brain Coil を使用して「健常な 20 代男性の頭部画像」を 156 枚撮像した．次に，90 番目の画像から 4×4 の学習用パッチ $\boldsymbol{z}_p \in \mathbb{C}^{16}$ を生成し，$T_c = 4$ として MOD [10] により辞書 $\bar{D} \in \mathbb{C}^{16\times256}$ を作成した．その後，式 (9) の問題 (提案法) と式 (4) の問題 (従来法) を解き，10，20，30，40，50 番目の画像を圧縮率 $1/4$，$1/5$，$1/6$ の観測信号から再構成した．各再構成結果の PSNR の値を Table 1 にまとめて示す．ここで，提案法と従来法のパラメータは，圧縮率 $1/4$ のときに 50 番目の画像が良好に再構成されるように設定した．

圧縮率 $1/4$ のときの 50 番目の画像に対する再構成結果を Fig. 1 に示す．真の画像とマスク画像を (a) と (d) に，提案法と従来法による再構成結果を (b) と (d) に，それぞれの推定誤差を (c) と (f) に示す．この場合には，どちらのパラメータも適切に設定されているため PSNR や推定誤差の値はほぼ同じである．しかし，50 番目以外の画像に対しては，Table 1 に示されている結果から，提案法による再構成結果のほうが平均で 0.97 [dB] 高い PSNR 値を示していることが分かる．次に，圧縮率を $1/5$，$1/6$ と変更した場合にも，提案法のほうが平均でそれぞれ 3.61 [dB]，1.16 [dB] 高い値を示していることが Table 1 から分かる．このことは，Figs. 2, 3 の (c) と (f) に示されている圧縮率 $1/5$，$1/6$ のときの 50 番目の画像の推定誤差に顕著に表れている．また，圧縮率 $1/5$ のときの 40 番目の画像の再構成結果を Fig. 4 に示す．この画像に対しても，推定誤差の差が (c) と (f) に大きく表れており，Table 1 から，従来法による再構成結果の PSNR 値が 24.47 [dB] であるのに対して，提案法による PSNR 値は 29.27 [dB] であり，4.8 [dB] もの改善が確認できる．このように，提案法では，従来見られた画像や圧縮率の変化に伴う急激な結果の変動が無くなり，良好な再構成結果が安定して得られている．

5 おわりに

評価関数の一部に用いられていた「観測信号との整合性」と「辞書との整合性」を新たにレベル集合制約とした最適化問題を解くことで，パラメータ設定に頑健な MR 画像再構成を実現した．実データを用いた数値実験によって，画像や圧縮率の異なる観測に対して同一のパラメータ設定を用いても，提案法が良好な再構成結果を安定して与えることを示した．

謝辞

本研究の一部は私立大学戦略的研究基盤形成支援事業 (S1311039) の助成を受けて行われた．

参考文献

1) S. W. Young, *Nuclear Magnetic Resonance Imaging: Basic Principles*. New York, NY, USA: Raven Press, 1984.

2) P. G. Morris, *Nuclear Magnetic Resonance Imaging in Medicine and Biology*. Oxford, Oxon, UK: Clarendon Press, 1986.

3) A. S. Agatston, W. R. Janowitz, F. J. Hildner, N. R. Zusmer, M. Viamonte Jr, and R. Detrano, “Quantification of coronary artery calcium using ultrafast computed tomography,” *Journal of the American College of Cardiology*, vol. 15, no. 4, pp. 827–832, Mar. 1990.

4) D. J. Brenner and E. J. Hall, “Computed tomography—An increasing source of radiation exposure,” *The New England Journal of Medicine*, vol. 357, no. 22, pp. 2277–2284, Nov. 2007.

5) D. L. Donoho, “Compressed sensing,” *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 52, no. 4, pp. 1289–1306, Apr. 2006.

6) E. J. Candès, “The restricted isometry property and its implications for compressed sensing,” *Comptes Rendus Mathematique*, vol. 346, no. 9-10, pp. 589–592, May 2008.

7) M. Lustig, D. L. Donoho, and J. M. Pauly, “Sparse MRI: The application of compressed sensing for rapid MR imaging,” *Magnetic Resonance in Medicine*, vol. 58, no. 6, pp. 1182–1195, Dec. 2007.

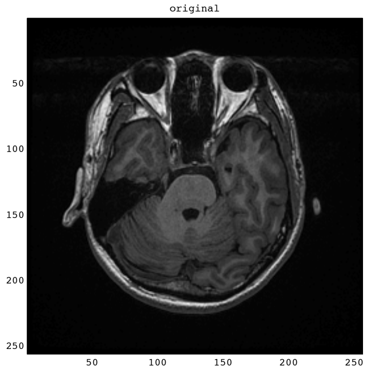
8) Y. Chen, X. Ye, and F. Huang, “A novel method and fast algorithm for MR image reconstruction with significantly under-sampled data,” *Inverse Problems and Imaging*, vol. 4, no. 2, pp. 223–240, May 2010.

9) D. Gabay and B. Mercier, “A dual algorithm for the solution of nonlinear variational problems via finite element approximation,” *Computers & Mathematics with Applications*, vol. 2, no. 1, pp. 17–40, 1976.

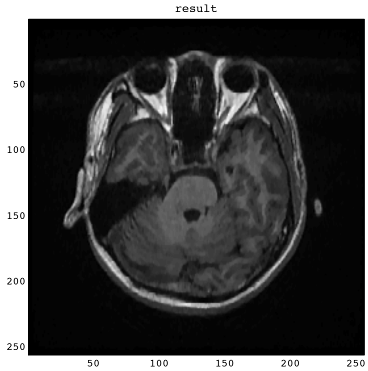
10) K. Engan, S. O. Aase, and J. H. Husøy, “Multi-frame compression: Theory and design,” *Signal Processing*, vol. 80, no. 10, pp. 2121–2140, Oct. 2000.

11) M. Aharon, M. Elad, and A. M. Bruckstein, “K-SVD: An algorithm for designing overcomplete dictionaries for sparse representation,” *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 54, no. 11, pp. 4311–4322, Nov. 2006.

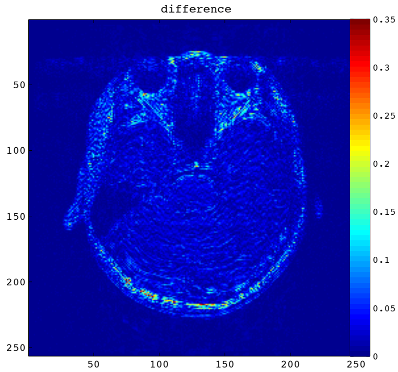
12) P. L. Combettes and J. C. Pesquet, “Proximal splitting methods in signal processing,” in *Fixed-Point Algorithms for Inverse Problems in Science and Engineering*, H. H. Bauschke, R. S. Burachik, P. L. Combettes, V. Elser, D. R. Luke, and H. Wolkowicz, Eds. New York, NY, USA: Springer, 2011, vol. 49, pp. 185–212.



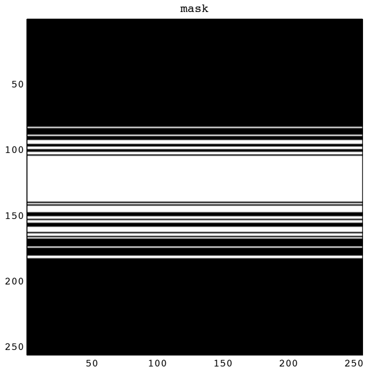
(a) 真の MR 画像



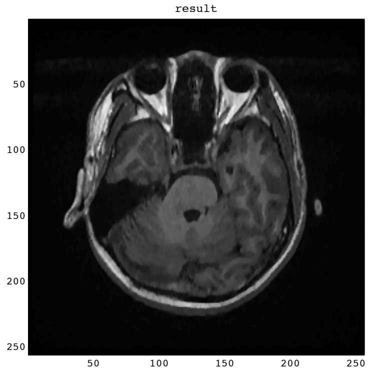
(b) 提案法による再構成結果



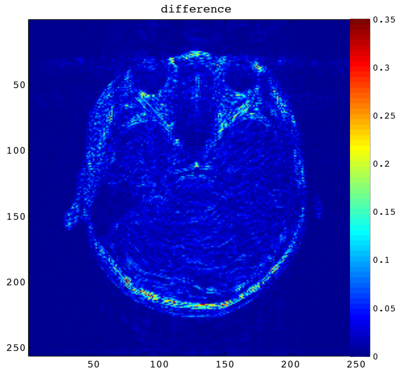
(c) 提案法による推定誤差



(d) 圧縮率 1/4 のときのマスク

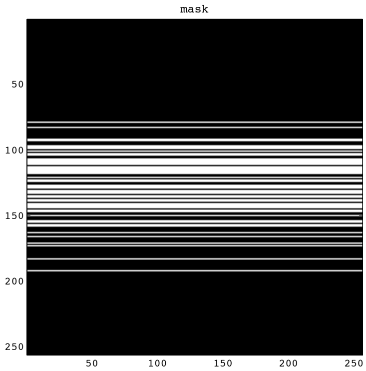


(e) 従来法による再構成結果

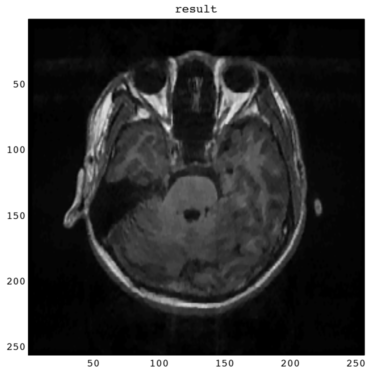


(f) 従来法による推定誤差

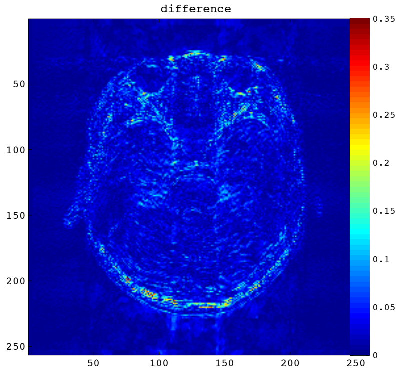
Fig. 1: 圧縮率 1/4 における 50 番目の MR 画像の再構成結果



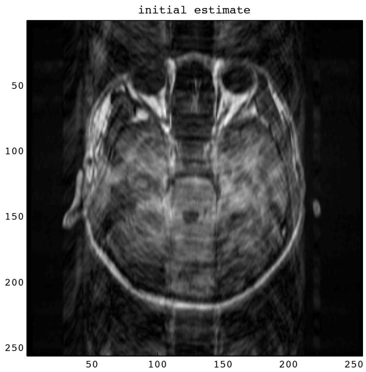
(a) 圧縮率 1/5 のときのマスク



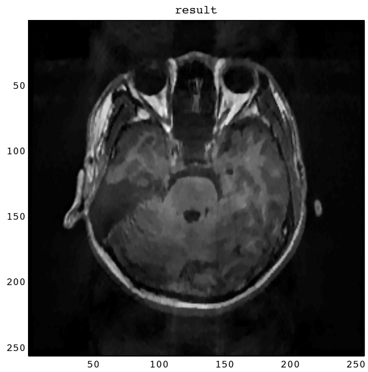
(b) 提案法による再構成結果



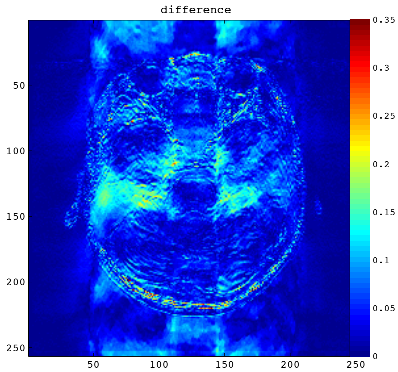
(c) 提案法による推定誤差



(d) 観測を逆フーリエ変換したもの

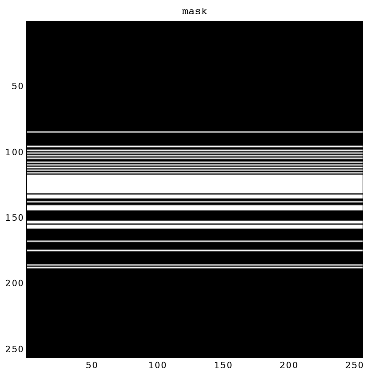


(e) 従来法による再構成結果

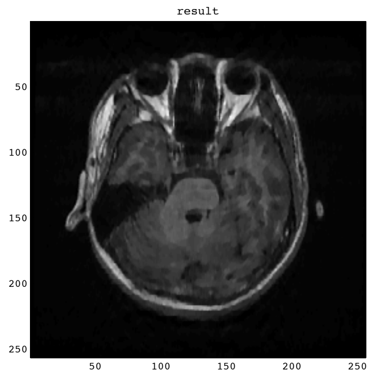


(f) 従来法による推定誤差

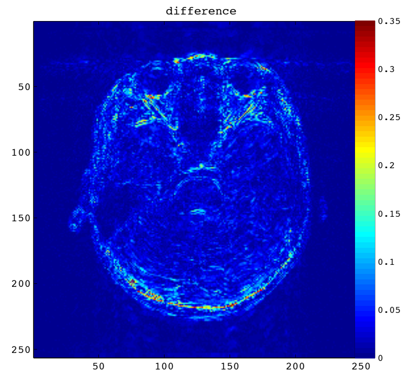
Fig. 2: 圧縮率 1/5 における 50 番目の MR 画像の再構成結果



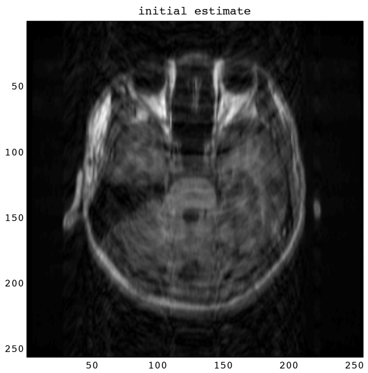
(a) 圧縮率 1/6 のときのマスク



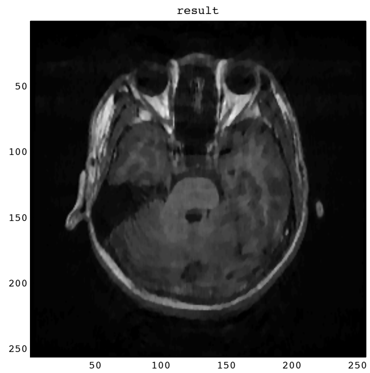
(b) 提案法による再構成結果



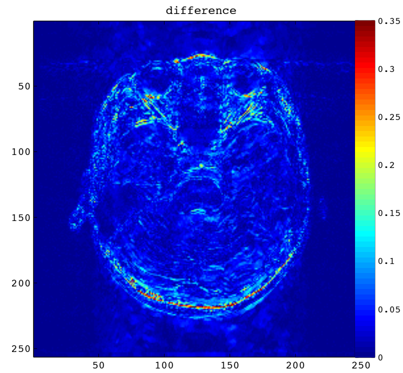
(c) 提案法による推定誤差



(d) 観測を逆フーリエ変換したもの

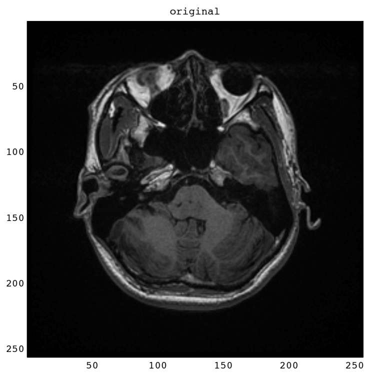


(e) 従来法による再構成結果

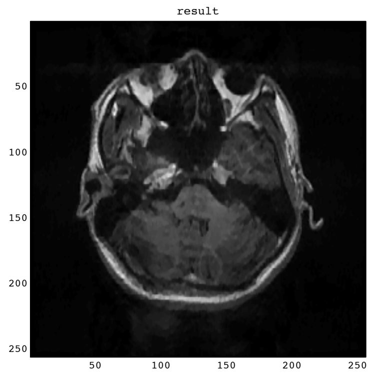


(f) 従来法による推定誤差

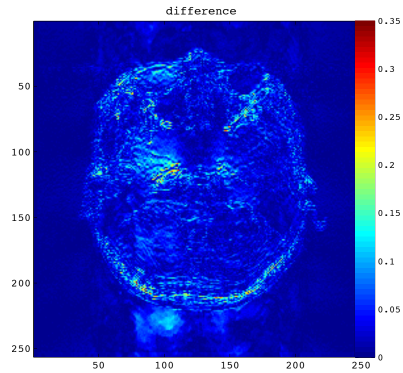
Fig. 3: 圧縮率 1/6 における 50 番目の MR 画像の再構成結果



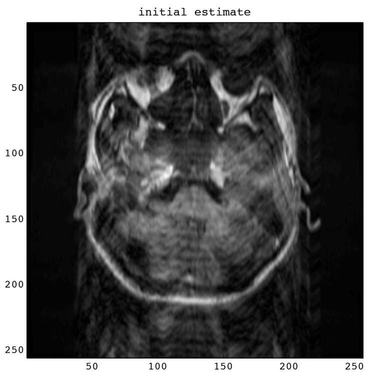
(a) 真の MR 画像



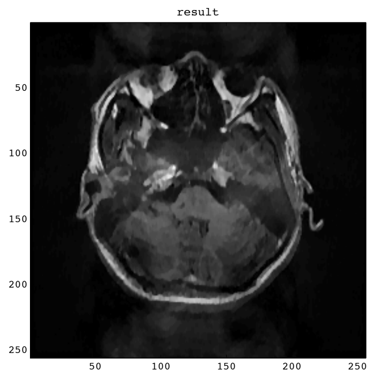
(b) 提案法による再構成結果



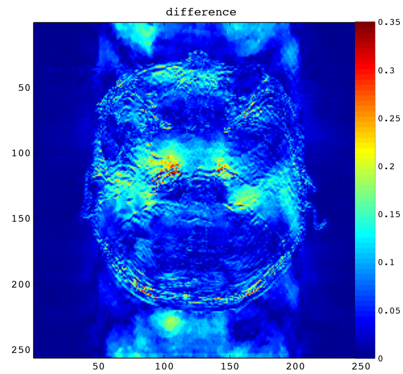
(c) 提案法による推定誤差



(d) 観測を逆フーリエ変換したもの



(e) 従来法による再構成結果



(f) 従来法による推定誤差

Fig. 4: 圧縮率 1/5 における 40 番目の MR 画像の再構成結果