

圧縮サンプリングからのパラメータ設定に頑健なMR画像再構成法

A Parameter-Robust MR Image Reconstruction from Compressive Sampling

柴田 基 北原 大地 平林 晃
立命館大学 大学院情報理工学研究科

Motoi SHIBATA Daichi KITAHARA Akira HIRABAYASHI
Graduate School of Information Science and Engineering, Ritsumeikan University

あらまし 高速撮像可能な磁気共鳴画像法 (MRI) として、圧縮センシング MRI (CS-MRI) が注目を集めている。CS-MRI では、MR 画像をスパースに表現可能な基底またはフレーム (辞書という) を用いることで、数少ない観測から高品質な MR 画像が再構成される。通常、再構成の際には、「観測信号との整合性」と「辞書との整合性」の両方を考慮した評価関数を最小化するが、2つの整合性項の重みを、画像や圧縮率に応じて慎重に調節する必要があった。本稿では、上記2つの整合性を不等式 (レベル集合) 制約とした最適化問題を構築し、この問題を交互方向乗数法 (ADMM) により解く手法を提案する。数値実験によって、雑音レベルが一定で辞書が適切に作成されている場合には、異なる観測信号に対し同じパラメータ設定を用いても、提案法は良好な再構成結果を安定して与えることを示す。

1 はじめに

磁気共鳴画像法 (Magnetic Resonance Imaging: MRI) [1], [2] は強力な磁場を発生させて生体の内部構造を撮像する医療機器である。X線を利用するコンピュータ断層撮影法 (Computed Tomography: CT) [3], [4] と比べて、MRI には放射線被曝を伴わないという利点がある。一方で、画像の離散フーリエ係数を観測する MRI では、1回の撮像に20分から30分程度の時間をかける必要があり、この長い撮像時間が被験者の大きな負担となるだけでなく、心臓等の常に動く部位の画質劣化原因ともなっている [5]。

近年、圧縮センシング (Compressed Sensing: CS) [6], [7] を利用して MRI の撮像時間を短縮する手法が注目されている [5], [8]。圧縮センシング MRI (CS-MRI) と総称されるこれらの手法は、一部のフーリエ係数のみを観測することで撮像時間を短縮し、ある種の最適化問題を解くことで、観測した一部のフーリエ係数から画像を再構成している。

MR 画像再構成の際に用いる最適化問題として、Lustigらは「観測信号との整合性」、「離散ウェーブレット変換後のスパース性」および「隣接画素間の類似性」を考慮に入れた評価関数の最小化問題を提案した [5]。この手法では、圧縮率が1/3程度の観測においては画像が高精度に再構成されるが、それより高い圧縮率の観測においては

再構成結果が著しく劣化してしまう問題があった。この原因として、離散ウェーブレット基底では再構成対象画像を十分スパースに表現できていないことが挙げられる。

高圧縮率の観測信号からも良好な再構成結果を得るために、Chenらは辞書学習を用いる手法を提案した [8]。まず、事前に時間をかけて撮像した高品質な MR 画像を学習用データとして使い、MR 画像をスパースに表現できる基底またはフレーム (辞書という) を作成する。次に、対象画像が辞書によりスパースに表現可能なことを考慮した評価関数を最小化することで、[5]の手法より高精度に画像を再構成する。しかしながら、良好な再構成結果を得るには、評価関数内の「観測信号との整合性」と「辞書との整合性」の重みを画像や圧縮率ごとに適切に設定する必要がある。

本稿では、上記2つの整合性を不等式 (レベル集合) 制約とした最適化問題を解く再構成手法を提案する。提案法では、整合性に関する2つのパラメータが「雑音の大きさ」と「辞書によるスパース表現の正確さ」をそのまま表しているため、雑音レベルが一定で辞書学習が理想的であれば、画像や圧縮率が異なる場合にもパラメータの最適値はほぼ変化しないと考えられる。また、最適化問題の解法に交互方向乗数法 (Alternating Direction Method of Multipliers: ADMM) [9] を用いることで、比較的高速に厳密解を求めることができる。実データを用いた数値実験において、提案法により、同じパラメータ設定でも、異なる観測信号から良好な再構成結果が得られることを確認している。

2 数学的準備

実数全体、複素数全体、正の整数全体の集合をそれぞれ \mathbb{R} , \mathbb{C} , \mathbb{N} で表す。ボールド体の小文字でベクトルを表し、大文字で行列を表す。ベクトル $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$ の第 i 成分を $\mathbf{x}[i]$ で表し、行列 $X \in \mathbb{C}^{M \times N}$ の第 (i, j) 成分を $X[i, j]$ で表す。ベクトル $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$ の l_2 ノルム $\|\cdot\|_2$ と l_1 ノルム $\|\cdot\|_1$ を、 $\|\mathbf{x}\|_2 := \sqrt{\sum_{i=1}^N |\mathbf{x}[i]|^2}$, $\|\mathbf{x}\|_1 := \sum_{i=1}^N |\mathbf{x}[i]|$ と定義し、 l_0 擬ノルム $\|\mathbf{x}\|_0$ の値を \mathbf{x} の非零成分数と定義する。また、 $N = GQ$ を満たす正の整数 G と Q を用い、 $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$ のグループ l_1 ノルム $\|\cdot\|_{1,2}^{G,Q}$ を $\|\mathbf{x}\|_{1,2}^{G,Q} := \sum_{i=1}^G \|\mathbf{x}_{g_i}\|_2 := \sum_{i=1}^G \sqrt{\sum_{j=0}^{Q-1} |\mathbf{x}[i+jG]|^2}$ のように定義する。

2.1 圧縮センシング MRI (CS-MRI)

CS-MRIにおいて、観測信号 $\mathbf{y} \in \mathbb{C}^N$ は

$$\mathbf{y} = U(F\mathbf{x} + \boldsymbol{\varepsilon}) = F_U\mathbf{x} + \boldsymbol{\varepsilon}_U \quad (1)$$

と表される。ここで、 $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$ はサイズ $\sqrt{N} \times \sqrt{N}$ のMR画像、ユニタリ行列 $F \in \mathbb{C}^{N \times N}$ は2次元離散フーリエ変換、対角行列 $U \in \{0, 1\}^{N \times N}$ はアンダーサンプリング、 $\boldsymbol{\varepsilon} \in \mathbb{C}^N$ は雑音を表し、 $F_U := UF$ かつ $\boldsymbol{\varepsilon}_U := U\boldsymbol{\varepsilon}$ である。また、観測信号 \mathbf{y} の圧縮率は $\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N U[k, k]$ と表される。CS-MRIにおける「MR画像再構成」とは、式(1)の \mathbf{y} と F_U から \mathbf{x} を推定するプロセスのことである。

CS-MRI研究の原点として、Lustigらは凸最適化問題

$$\underset{\mathbf{x}}{\text{minimize}} \mu \|F_U\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2^2 + \|\Psi\mathbf{x}\|_1 + \lambda \text{TV}_1(\mathbf{x}) \quad (2)$$

を解くことでMR画像を再構成する手法を提案した[5]。ここで、 $\Psi \in \mathbb{C}^{N \times N}$ は離散ウェーブレット変換、 TV_1 は非等方性全変動 (anisotropic total variation) であり、差分行列¹ $\Delta := (\Delta_H^T, \Delta_V^T)^T \in \mathbb{R}^{2N \times N}$ を用いて、 $\text{TV}_1(\mathbf{x}) := \|\Delta\mathbf{x}\|_1$ と定義される。 $\mu > 0$ と $\lambda > 0$ は評価関数内の各項の重みを決定するパラメータである。この手法は、圧縮率が1/3程度までならばMR画像を高精度に再構成できる。

より高い圧縮率の観測信号からも良好な再構成結果を得るために、Chenらはパッチベースの辞書を用いる手法を提案した[8]。まず、事前に時間をかけて撮像した高品質なMR画像をサイズ $\sqrt{n} \times \sqrt{n}$ の小さなパッチ $\mathbf{z}_p \in \mathbb{C}^n$ ($p = 1, 2, \dots, P$) に分割し、NP困難な最適化問題

$$\underset{D, \{\mathbf{c}_p\}}{\text{minimize}} \sum_{p=1}^P \|\mathbf{z}_p - D\mathbf{c}_p\|_2^2 \quad \text{s.t. } \forall p \|\mathbf{c}_p\|_0 \leq T_c \quad (3)$$

の近似解として辞書 $\bar{D} \in \mathbb{C}^{n \times K}$ を作成する。ここで、 $\mathbf{c}_p \in \mathbb{C}^K$ はパッチ \mathbf{z}_p の辞書 D によるスパース表現、 $T_c \in \mathbb{N}$ は所望のスパースレベルを表す。式(3)の問題の近似解はMOD[10]やK-SVD[11]等のアルゴリズムにより求まる。次に、作成した事前辞書 \bar{D} に基づく凸最適化問題

$$\underset{\mathbf{x}, \{\mathbf{c}_{i,j}\}}{\text{minimize}} \left[\mu \|F_U\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2^2 + \nu \sum_{i,j} \|\mathbf{x}_{i,j} - \bar{D}\mathbf{c}_{i,j}\|_2^2 + \sum_{i,j} \|\mathbf{c}_{i,j}\|_1 + \lambda \text{TV}_2(\mathbf{x}) \right] \quad (4)$$

を解くことでMR画像を再構成する。ここで、 $\mathbf{x}_{i,j} \in \mathbb{C}^n$ は \mathbf{x} の画素 (i, j) が左上端の画素である $\sqrt{n} \times \sqrt{n}$ のパッチ、 $\mathbf{c}_{i,j} \in \mathbb{C}^K$ はパッチ $\mathbf{x}_{i,j}$ の辞書 \bar{D} によるスパース表現、 TV_2 は等方性全変動 (isotropic total variation) であり、差分行列を用いて $\text{TV}_2(\mathbf{x}) := \|\Delta\mathbf{x}\|_{1,2}$ と定義される。 $\nu > 0$ は辞書との整合性項の重みを決定するパラメータである。

¹ $\Delta_H \in \{-1, 0, 1\}^{N \times N}$ と $\Delta_V \in \{-1, 0, 1\}^{N \times N}$ はそれぞれ水平方向と垂直方向の差分行列を表しており、右端の画素値と左端の画素値の差分、および、下端の画素値と上端の画素値の差分も計算している。

2.2 交互方向乗数法 (ADMM)

以下の凸最適化問題を考える。

$$\underset{\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N, \mathbf{z} \in \mathbb{C}^M}{\text{minimize}} f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{z}) \quad \text{s.t. } \mathbf{z} = L\mathbf{x}. \quad (5)$$

ここで、 $f: \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ と $g: \mathbb{C}^M \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ は下半連続な真凸関数²であり、 $L \in \mathbb{C}^{M \times N}$ である。³ ADMM[9]は任意の初期値 $(\mathbf{z}^{(0)}, \boldsymbol{\xi}^{(0)}) \in \mathbb{C}^M \times \mathbb{C}^M$ から

$$\begin{cases} \mathbf{x}^{(t+1)} = \underset{\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N}{\text{argmin}} f(\mathbf{x}) + \frac{1}{2\gamma} \|\mathbf{z}^{(t)} - L\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}^{(t)}\|_2^2 \\ \mathbf{z}^{(t+1)} = \text{prox}_{\gamma g}(L\mathbf{x}^{(t+1)} + \boldsymbol{\xi}^{(t)}) \\ \boldsymbol{\xi}^{(t+1)} = \boldsymbol{\xi}^{(t)} + L\mathbf{x}^{(t+1)} - \mathbf{z}^{(t+1)} \end{cases} \quad (6)$$

を計算し、式(5)の問題の解を逐次近似するアルゴリズムである。 $\text{prox}_{\gamma g}: \mathbb{C}^M \rightarrow \mathbb{C}^M$ は真凸関数 γg の近接写像 (proximity operator) であり、任意の実数 $\gamma > 0$ に対して、

$$\text{prox}_{\gamma g}(\mathbf{z}) := \underset{\mathbf{y} \in \mathbb{C}^M}{\text{argmin}} g(\mathbf{y}) + \frac{1}{2\gamma} \|\mathbf{y} - \mathbf{z}\|_2^2.$$

のように定義される。⁴

例えば g が ℓ_1 ノルムであるとき、 $g(\mathbf{y}) + \frac{1}{2\gamma} \|\mathbf{y} - \mathbf{z}\|_2^2 = \sum_{i=1}^M (|z[i]| + \frac{1}{2\gamma} |\mathbf{y}[i] - z[i]|^2)$ となり各成分ごとの計算に分離できる。したがって、凸関数 $\gamma|\cdot|$ の近接写像

$$\text{prox}_{\gamma|\cdot|}(z[i]) = \begin{cases} \frac{|z[i]| - \gamma}{|z[i]|} z[i] & \text{if } |z[i]| > \gamma, \\ 0 & \text{if } |z[i]| \leq \gamma, \end{cases} \quad (7)$$

を用いることで

$$\text{prox}_{\gamma\|\cdot\|_1}(\mathbf{z}) = \begin{pmatrix} \text{prox}_{\gamma|\cdot|}(z[1]) \\ \text{prox}_{\gamma|\cdot|}(z[2]) \\ \vdots \\ \text{prox}_{\gamma|\cdot|}(z[M]) \end{pmatrix}$$

が計算される。同様に、 g がグループ ℓ_1 ノルムであるとき、 $g(\mathbf{y}) + \frac{1}{2\gamma} \|\mathbf{y} - \mathbf{z}\|_2^2 = \sum_{i=1}^G (\|\mathbf{y}_{\mathbf{g}_i}\|_2 + \frac{1}{2\gamma} \|\mathbf{y}_{\mathbf{g}_i} - \mathbf{z}_{\mathbf{g}_i}\|_2^2)$ となり各グループごとの計算に分離できる。したがって、凸関数 $\gamma\|\cdot\|_2$ の近接写像

$$\text{prox}_{\gamma\|\cdot\|_2}(\mathbf{z}_{\mathbf{g}_i}) = \begin{cases} \frac{\|\mathbf{z}_{\mathbf{g}_i}\|_2 - \gamma}{\|\mathbf{z}_{\mathbf{g}_i}\|_2} \mathbf{z}_{\mathbf{g}_i} & \text{if } \|\mathbf{z}_{\mathbf{g}_i}\|_2 > \gamma, \\ \mathbf{0} & \text{if } \|\mathbf{z}_{\mathbf{g}_i}\|_2 \leq \gamma, \end{cases} \quad (8)$$

を用いることで $\text{prox}_{\gamma\|\cdot\|_{1,2}}(\mathbf{z})$ が計算される。その他の凸関数の近接写像に関しては、[12]などを参照されたい。

²任意の $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して、関数 $f: \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ のレベル集合 $\text{lev}_{\leq \alpha}(f) := \{\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N \mid f(\mathbf{x}) \leq \alpha\}$ が閉集合となるとき、 f は下半連続であるという。また、 f が $\text{dom}(f) := \{\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N \mid f(\mathbf{x}) < \infty\} \neq \emptyset$ を満たし、任意の $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^N$ と $\lambda \in (0, 1)$ に対して、 $f(\lambda\mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y}) \leq \lambda f(\mathbf{x}) + (1-\lambda)f(\mathbf{y})$ を満たすとき、 f は真凸関数であるという。

³行列 $L^H L$ の逆行列 $(L^H L)^{-1}$ が存在すると仮定している。

⁴写像先 (最小解) の存在性および一意性は、第2項 $\frac{1}{2\gamma} \|\cdot - \mathbf{z}\|_2^2$ の狭義凸性により保証される。

3 パラメータ設定に頑健な MR 画像再構成

3.1 レベル集合制約を用いた最適化問題

式 (2) や式 (4) の最適化問題では、良好な再構成結果が得られるように、パラメータ μ , ν , λ の値を慎重に調節する必要がある。しかしながら、各パラメータの最適値は対象画像や圧縮率に応じて変わるため、同一のパラメータ設定では、異なる観測信号から良好な再構成結果を安定して得ることは困難である。そこで本研究では、2つの整合性項を不等式(レベル集合)制約とした凸最適化問題

$$\begin{aligned} & \underset{\mathbf{x}, \{c_{i,j}\}}{\text{minimize}} \sum_{i,j} \|c_{i,j}\|_1 + \lambda \text{TV}_l(\mathbf{x}) \\ & \text{s.t. } \|F_U \mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2 \leq \epsilon \text{ and } \forall i,j \|x_{i,j} - \bar{D}c_{i,j}\|_2 \leq \delta \end{aligned} \quad (9)$$

を解くことにより MR 画像を再構成する手法を提案する。ここで、 $l=1$ または $l=2$, $\epsilon \geq 0$ かつ $\delta \geq 0$ である。

整合性に関する2つのパラメータ ϵ , δ はそれぞれ「雑音の大きさ」と「辞書によるスパース表現の正確さ」を表し、雑音レベルが一定かつ辞書が MR 画像を適切に表現できるならば、パラメータの最適値は対象画像や圧縮率に大きく依存しないことが期待される。また、式(2)や式(4)は式(9)の問題のラグランジュ関数の特殊例とも解釈できる。⁵

3.2 ADMM による解法

式 (9) の問題は、以下の凸最適化問題と等価である。⁶

$$\begin{aligned} & \underset{\mathbf{x}, \mathbf{c}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{u}, \mathbf{v}}{\text{minimize}} \iota_\epsilon(\mathbf{x}) + \|\boldsymbol{\alpha}\|_1 + \lambda \|\boldsymbol{\beta}\|_{1,2}^{N,2} + \sum_{i,j} \iota_\delta(\mathbf{u}_{i,j}, \mathbf{v}_{i,j}) \\ & \text{s.t. } \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{c}, \boldsymbol{\beta} = \Delta \mathbf{x}, \forall i,j \mathbf{u}_{i,j} = R_{i,j} \mathbf{x} \text{ and } \mathbf{v}_{i,j} = \bar{D}c_{i,j}. \end{aligned} \quad (10)$$

ここで、 ι_ϵ と ι_δ はレベル集合の指示関数、すなわち、

$$\iota_\epsilon(\mathbf{x}) := \begin{cases} 0 & \text{if } \|UF\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2 \leq \epsilon, \\ \infty & \text{if } \|UF\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2 > \epsilon, \end{cases}$$

かつ

$$\iota_\delta(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \begin{cases} 0 & \text{if } \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|_2 \leq \delta, \\ \infty & \text{if } \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|_2 > \delta, \end{cases}$$

である。 $R_{i,j} \in \{0, 1\}^{n \times N}$ はパッチ抽出行列であり、 $\mathbf{x}_{i,j}$ は $R_{i,j} \mathbf{x}$ を満たす。また、ベクトル \mathbf{c} , $\boldsymbol{\alpha}$, \mathbf{u} , \mathbf{v} はそれぞれ、 $\mathbf{c}_{i,j}$, $\boldsymbol{\alpha}_{i,j}$, $\mathbf{u}_{i,j}$, $\mathbf{v}_{i,j}$ を連結してできるベクトルである。

式(5)の関数 f と g を $f(\mathbf{x}, \mathbf{c}) := \iota_\epsilon(\mathbf{x})$, $g(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) := \|\boldsymbol{\alpha}\|_1 + \lambda \|\boldsymbol{\beta}\|_{1,2}^{N,2} + \sum_{i,j} \iota_\delta(\mathbf{u}_{i,j}, \mathbf{v}_{i,j})$ として、ADMM による解法を導出する。まず、式(6)の1行目に関して、MR 画像 \mathbf{x} はフーリエ係数 $\hat{\mathbf{x}} := F\mathbf{x}$ を通して更新される。

$$\mathbf{s}^{(t)} := F \left(\Delta^T (\boldsymbol{\beta}^{(t)} - \boldsymbol{\xi}_\beta^{(t)}) + \sum_{i,j} R_{i,j}^T (\mathbf{u}_{i,j}^{(t)} - \boldsymbol{\xi}_{u_{i,j}}^{(t)}) \right)$$

⁵パッチを画像全体(つまり $\mathbf{x}_{i,j} = \mathbf{x}$)とし、 $\delta = 0$ かつ $\bar{D} = \Psi^{-1}$ とすれば式(2)が導出される。また、辞書との整合性 $\|\mathbf{x}_{i,j} - \bar{D}c_{i,j}\|_2$ に関するラグランジュ乗数の値を全て等しくすれば式(4)が導出される。

⁶ここでは $l=2$ としている。 $l=1$ の場合は $\lambda \|\boldsymbol{\beta}\|_1$ とすればよい。

と定義すると、 $\|U(\hat{\Delta} + mI_N)^{-1}\mathbf{s}^{(t)} - \mathbf{y}\|_2 \leq \epsilon$ のとき、 $\hat{\mathbf{x}}^{(t+1)} = (\hat{\Delta} + mI_N)^{-1}\mathbf{s}^{(t)}$ のように更新される。ここで、 $\hat{\Delta} := F\Delta^T\Delta F^H \in \mathbb{R}^{N \times N}$ は対角行列、 $I_N \in \mathbb{R}^{N \times N}$ は N 次の単位行列、 $m \in \mathbb{N}$ は各画素がパッチに用いられる回数⁷である。 $\|U(\hat{\Delta} + mI_N)^{-1}\mathbf{s}^{(t)} - \mathbf{y}\|_2 > \epsilon$ のときは、

$$\hat{\mathbf{x}}^{(t+1)}[k] = \begin{cases} \frac{\mathbf{s}^{(t)}[k]}{\hat{\Delta}[k,k] + m} & \text{if } U[k,k] = 0, \\ \frac{\mathbf{s}^{(t)}[k] + \zeta^{(t)}\mathbf{y}[k]}{\hat{\Delta}[k,k] + m + \zeta^{(t)}} & \text{if } U[k,k] = 1, \end{cases} \quad (11)$$

のように更新される。式(11)内の $\zeta^{(t)} > 0$ は

$$\sum_{k \text{ s.t. } U[k,k]=1} \left| \frac{\mathbf{s}^{(t)}[k] - (\hat{\Delta}[k,k] + m)\mathbf{y}[k]}{\hat{\Delta}[k,k] + m + \zeta^{(t)}} \right|^2 = \epsilon^2$$

を満たす値⁸であり、特に $\epsilon = 0$ のときは、 $\zeta^{(t)} = \infty$ から $U[k,k] = 1$ を満たす k に対して、 $\hat{\mathbf{x}}^{(t+1)}[k] = \mathbf{y}[k]$ となる。 $\hat{\mathbf{x}}$ の更新後、MR 画像は $\mathbf{x}^{(t+1)} = F^H \hat{\mathbf{x}}^{(t+1)}$ によって計算される。スパース表現 \mathbf{c} は各パッチの表現 $\mathbf{c}_{i,j}$ ごとに、

$$\mathbf{c}_{i,j}^{(t+1)} = (I_K + \bar{D}^H \bar{D})^{-1} \left(\boldsymbol{\alpha}_{i,j}^{(t)} - \boldsymbol{\xi}_{\boldsymbol{\alpha}_{i,j}}^{(t)} + \bar{D}^H (\mathbf{v}_{i,j}^{(t)} - \boldsymbol{\xi}_{\mathbf{v}_{i,j}}^{(t)}) \right) \quad (12)$$

のように更新される。⁹

次に、式(6)の2行目に関して、 $\boldsymbol{\alpha}$ と $\boldsymbol{\beta}$ は

$$\begin{cases} \boldsymbol{\alpha}^{(t+1)} = \text{prox}_{\gamma \|\cdot\|_1}(\mathbf{c}^{(t+1)} + \boldsymbol{\xi}_\alpha^{(t)}) \\ \boldsymbol{\beta}^{(t+1)} = \text{prox}_{\gamma \lambda \|\cdot\|_{1,2}^{N,2}}(\Delta \mathbf{x}^{(t+1)} + \boldsymbol{\xi}_\beta^{(t)}) \end{cases} \quad (13)$$

のように更新される(計算には式(7), (8)を用いる)。また、 \mathbf{u} と \mathbf{v} は、 $e_{i,j}^{(t)} := \|\mathbf{x}_{i,j}^{(t+1)} + \boldsymbol{\xi}_{\mathbf{u}_{i,j}}^{(t)} - (\bar{D}c_{i,j}^{(t+1)} + \boldsymbol{\xi}_{\mathbf{v}_{i,j}}^{(t)})\|_2$ を定義すると、 $e_{i,j}^{(t)} \leq \delta$ のとき、 $\mathbf{u}_{i,j}^{(t+1)} = \mathbf{x}_{i,j}^{(t+1)} + \boldsymbol{\xi}_{\mathbf{u}_{i,j}}^{(t)}$, $\mathbf{v}_{i,j}^{(t+1)} = \bar{D}c_{i,j}^{(t+1)} + \boldsymbol{\xi}_{\mathbf{v}_{i,j}}^{(t)}$ と更新され、 $e_{i,j}^{(t)} > \delta$ のときは、

$$\begin{cases} \mathbf{u}_{i,j}^{(t+1)} = \frac{e_{i,j}^{(t)} + \delta}{2e_{i,j}^{(t)}} (\mathbf{x}_{i,j}^{(t+1)} + \boldsymbol{\xi}_{\mathbf{u}_{i,j}}^{(t)}) + \frac{e_{i,j}^{(t)} - \delta}{2e_{i,j}^{(t)}} (\bar{D}c_{i,j}^{(t+1)} + \boldsymbol{\xi}_{\mathbf{v}_{i,j}}^{(t)}) \\ \mathbf{v}_{i,j}^{(t+1)} = \frac{e_{i,j}^{(t)} - \delta}{2e_{i,j}^{(t)}} (\mathbf{x}_{i,j}^{(t+1)} + \boldsymbol{\xi}_{\mathbf{u}_{i,j}}^{(t)}) + \frac{e_{i,j}^{(t)} + \delta}{2e_{i,j}^{(t)}} (\bar{D}c_{i,j}^{(t+1)} + \boldsymbol{\xi}_{\mathbf{v}_{i,j}}^{(t)}) \end{cases} \quad (14)$$

と更新される。

最後に、式(6)の3行目に相当する部分として、

$$\begin{cases} \boldsymbol{\xi}_\alpha^{(t+1)} = \boldsymbol{\xi}_\alpha^{(t)} + \mathbf{c}^{(t+1)} - \boldsymbol{\alpha}^{(t+1)} \\ \boldsymbol{\xi}_\beta^{(t+1)} = \boldsymbol{\xi}_\beta^{(t)} + \Delta \mathbf{x}^{(t+1)} - \boldsymbol{\beta}^{(t+1)} \\ \boldsymbol{\xi}_{\mathbf{u}_{i,j}}^{(t+1)} = \boldsymbol{\xi}_{\mathbf{u}_{i,j}}^{(t)} + \mathbf{x}_{i,j}^{(t+1)} - \mathbf{u}_{i,j}^{(t+1)} \\ \boldsymbol{\xi}_{\mathbf{v}_{i,j}}^{(t+1)} = \boldsymbol{\xi}_{\mathbf{v}_{i,j}}^{(t)} + \bar{D}c_{i,j}^{(t+1)} - \mathbf{v}_{i,j}^{(t+1)} \end{cases} \quad (15)$$

を計算する。式(11)–(15)の演算を取束条件が満たされるまで繰り返すことで、式(10)の問題の最適解を求める。

⁷差分値の計算と同様に、右端の画素と左端の画素、または、下端の画素と上端の画素を繋げて作られるパッチも考慮している。

⁸例えば、ニュートン法などにより $\zeta^{(t)}$ が高速に求まると考えられる。

⁹実際には、レベル集合への収束速度向上のために、 $\mathbf{s}^{(t)}$, $\hat{\mathbf{x}}^{(t+1)}$, $\mathbf{c}_{i,j}^{(t+1)}$ の計算時に、 $R_{i,j}^T (\mathbf{u}_{i,j}^{(t)} - \boldsymbol{\xi}_{\mathbf{u}_{i,j}}^{(t)})$, m , $\bar{D}^H \bar{D}$, $\bar{D}^H (\mathbf{v}_{i,j}^{(t)} - \boldsymbol{\xi}_{\mathbf{v}_{i,j}}^{(t)})$ の値をそれぞれ $\eta \in \mathbb{N}$ 倍するとよい(数値実験では、 $\eta = 20$ とした)。

表 1: シミュレーション結果

圧縮率 / 画像 No.		10	20	30	40	50	平均値
1/4	提案法	34.27 [dB]	33.65 [dB]	29.53 [dB]	31.15 [dB]	31.10 [dB]	31.94 [dB]
	従来法	32.83 [dB]	33.26 [dB]	28.26 [dB]	30.38 [dB]	31.14 [dB]	31.17 [dB]
1/5	提案法	34.22 [dB]	34.12 [dB]	31.18 [dB]	29.27 [dB]	30.41 [dB]	31.84 [dB]
	従来法	31.95 [dB]	30.94 [dB]	28.14 [dB]	24.47 [dB]	25.65 [dB]	28.23 [dB]
1/6	提案法	31.28 [dB]	32.83 [dB]	28.99 [dB]	29.06 [dB]	29.71 [dB]	30.37 [dB]
	従来法	30.70 [dB]	31.02 [dB]	27.17 [dB]	28.37 [dB]	28.81 [dB]	29.21 [dB]
平均値	提案法	33.26 [dB]	33.53 [dB]	29.90 [dB]	29.83 [dB]	30.41 [dB]	31.38 [dB]
	従来法	31.83 [dB]	31.74 [dB]	27.86 [dB]	27.74 [dB]	28.53 [dB]	29.54 [dB]

4 シミュレーション

GE Healthcare UK 社製 MRI 装置「SignaHDxt 1.5T」で得られた健常な 20 代男性の頭部画像をシミュレーションに用いた。まず、 $TR = 12.4$ [ms], $TE = 5.2$ [ms], $FOV = 240$ [mm] \times 240 [mm], $Gap = 0$, $Thickness = 1$ [mm] に設定し、8ch Brain Coil を使用して頭部を 156 枚撮像した。次に、90 番目の画像から 4×4 の学習用パッチ $z_p \in \mathbb{C}^{16}$ を生成し、 $T_c = 4$ として MOD [10] により辞書 $\bar{D} \in \mathbb{C}^{16 \times 256}$ を作成した。最後に、式 (9) の問題 (提案法) と式 (4) の問題 (従来法 [8]) を解き、10, 20, 30, 40, 50 番目の画像を圧縮率 1/4, 1/5, 1/6 の観測から再構成し、結果を PSNR によって評価した。提案法と従来法のパラメータは、圧縮率 1/4 のとき 50 番目の画像が良好に再構成されるように設定した。

シミュレーション結果を表 1 に示す。圧縮率 1/4 (マスクは図 1(d)) のとき、50 番目の画像 (図 1(a)) に対しては、提案法 (図 1(b)) と従来法 (図 1(e)) のどちらのパラメータも適切に設定されているため PSNR や推定誤差 (図 1(c), 図 1(f)) の値はほぼ同じであるが、50 番目以外の画像に対しては、提案法による再構成結果のほうが平均で 0.97 [dB] 高い PSNR 値を示している。また、圧縮率 1/5 (マスクは図 2(a)) や 1/6 (マスクは図 4(a)) のときに同一のパラメータ設定を用いた場合にも、提案法のほうが高精度に再構成できていることが分かる。特に、圧縮率 1/5 のときの結果 (図 2, 図 3) の差が著しく、例えば 40 番目の画像 (図 3(a)) では、従来法 (図 3(e)) による PSNR 値が 24.47 [dB] であるのに対して、提案法 (図 3(b)) の値は 29.27 [dB] であり、4.8 [dB] もの改善が確認できる。このように、提案法では、従来見られた画像や圧縮率の変化に伴う急激な結果の変動が無くなり、良好な再構成結果が安定して得られている。

5 おわりに

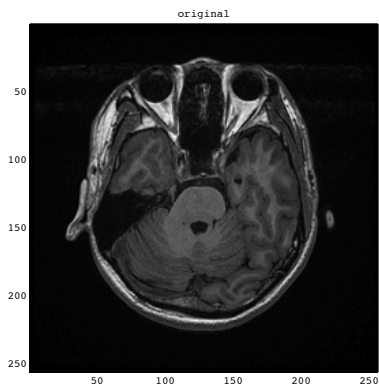
評価関数の一部に用いられていた「観測信号との整合性」と「辞書との整合性」を新たにレベル集合制約とした凸最適化問題を解くことで、パラメータ設定に頑健な MR 画像再構成を実現した。数値実験によって、画像や圧縮率

の異なる観測信号に対し同一のパラメータ設定を用いても、提案法が良好な再構成結果を安定して与えることを示した。
謝辞

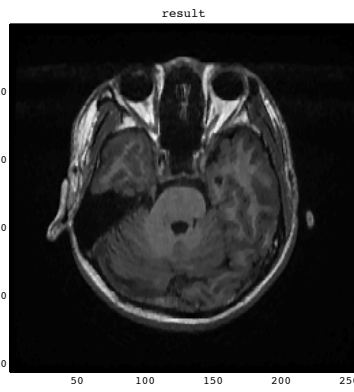
本研究の一部は私立大学戦略的研究基盤形成支援事業 (S1311039) の助成を受けて行われた。

参考文献

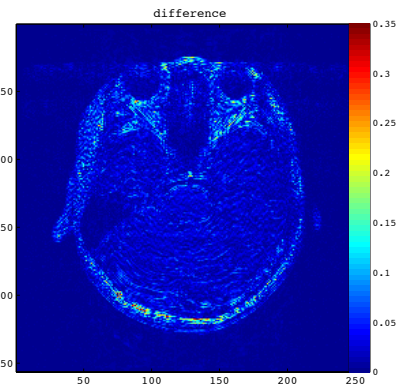
- [1] S. W. Young, *Nuclear Magnetic Resonance Imaging: Basic Principles*. New York: Raven Press, 1984.
- [2] P. G. Morris, *Nuclear Magnetic Resonance Imaging in Medicine and Biology*. Oxford: Clarendon Press, 1986.
- [3] A. S. Agatston, W. R. Janowitz, F. J. Hildner, N. R. Zusmer, M. Viamonte Jr, and R. Detrano, "Quantification of coronary artery calcium using ultrafast computed tomography," *J. Amer. College Card.*, vol. 15, no. 4, pp. 827–832, 1990.
- [4] D. J. Brenner and E. J. Hall, "Computed tomography—An increasing source of radiation exposure," *New Engl. J. Med.*, vol. 357, no. 22, pp. 2277–2284, 2007.
- [5] M. Lustig, D. L. Donoho, and J. M. Pauly, "Sparse MRI: The application of compressed sensing for rapid MR imaging," *Magnet. Reson. Med.*, vol. 58, no. 6, pp. 1182–1195, 2007.
- [6] D. L. Donoho, "Compressed sensing," *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. 52, no. 4, pp. 1289–1306, 2006.
- [7] E. J. Candès, "The restricted isometry property and its implications for compressed sensing," *Comptes Rendus Mathématique*, vol. 346, no. 9–10, pp. 589–592, 2008.
- [8] Y. Chen, X. Ye, and F. Huang, "A novel method and fast algorithm for MR image reconstruction with significantly under-sampled data," *Inv. Prob. Imag.*, vol. 4, no. 2, pp. 223–240, 2010.
- [9] D. Gabay and B. Mercier, "A dual algorithm for the solution of nonlinear variational problems via finite element approximation," *Comput. Math. Appl.*, vol. 2, no. 1, pp. 17–40, 1976.
- [10] K. Engan, S. O. Aase, and J. H. Husøy, "Multi-frame compression: Theory and design," *Signal Process.*, vol. 80, no. 10, pp. 2121–2140, 2000.
- [11] M. Aharon, M. Elad, and A. M. Bruckstein, "K-SVD: An algorithm for designing overcomplete dictionaries for sparse representation," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 54, no. 11, pp. 4311–4322, 2006.
- [12] P. L. Combettes and J. C. Pesquet, "Proximal splitting methods in signal processing," in *Fixed-Point Algorithms for Inverse Problems in Science and Engineering*, H. H. Bauschke, R. S. Burachik, P. L. Combettes, V. Elser, D. R. Luke, and H. Wolkowicz, Eds. New York: Springer, 2011, pp. 185–212.



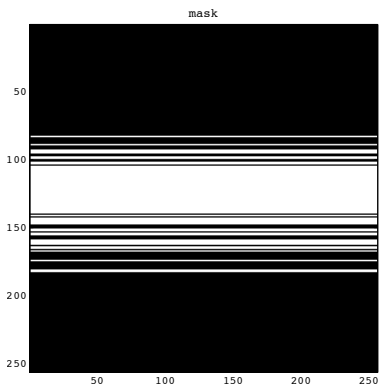
(a) 真の MR 画像



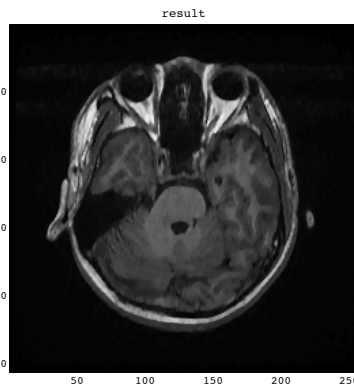
(b) 提案法による再構成結果



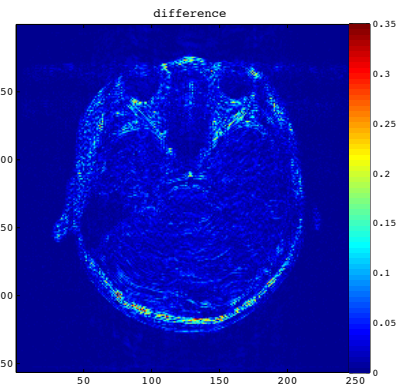
(c) 提案法による推定誤差



(d) 圧縮率 1/4 のときのマスク

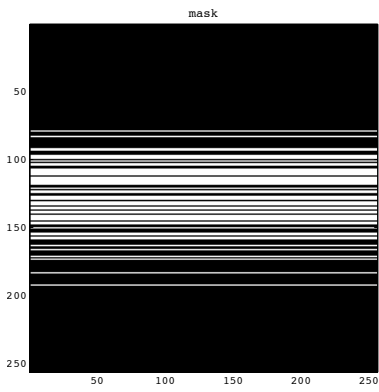


(e) 従来法 [8] による再構成結果

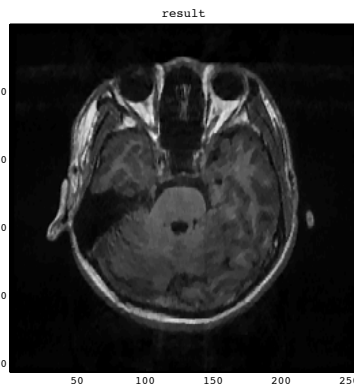


(f) 従来法 [8] による推定誤差

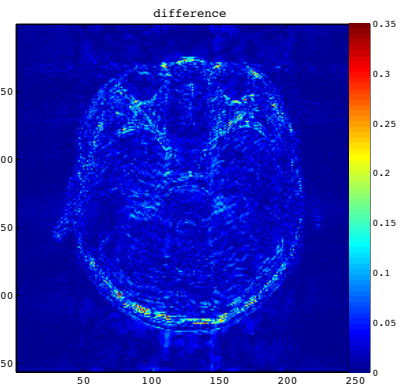
図 1: 圧縮率 1/4 における 50 番目の MR 画像の再構成結果



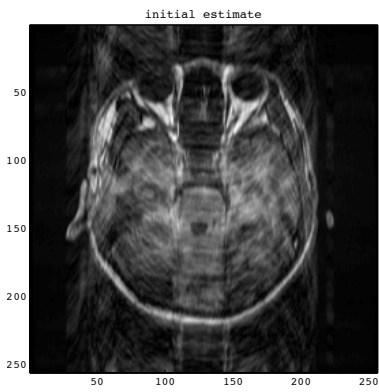
(a) 圧縮率 1/5 のときのマスク



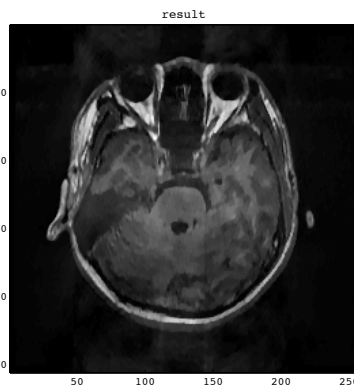
(b) 提案法による再構成結果



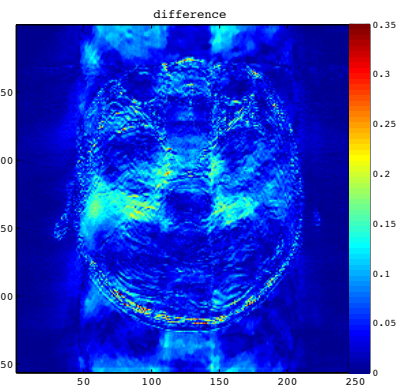
(c) 提案法による推定誤差



(d) 観測信号を逆フーリエ変換したもの

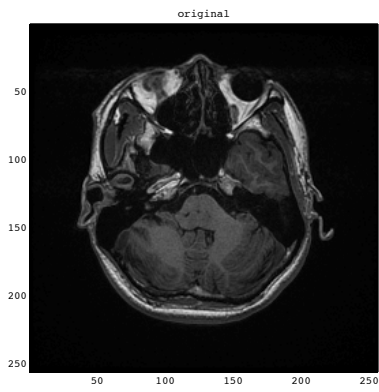


(e) 従来法 [8] による再構成結果

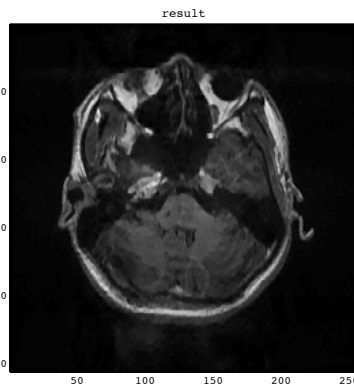


(f) 従来法 [8] による推定誤差

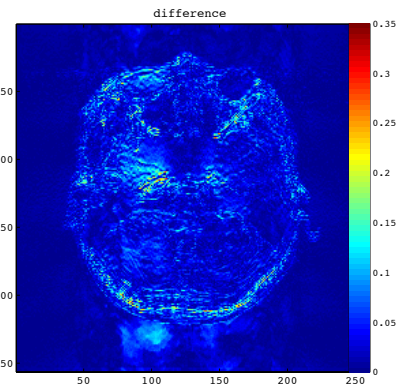
図 2: 圧縮率 1/5 における 50 番目の MR 画像の再構成結果



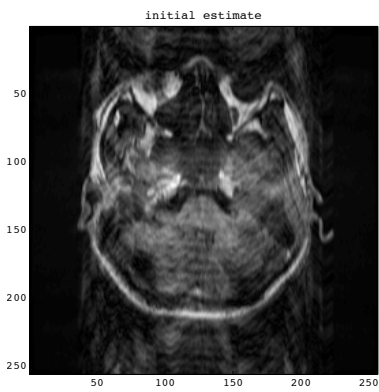
(a) 真の MR 画像



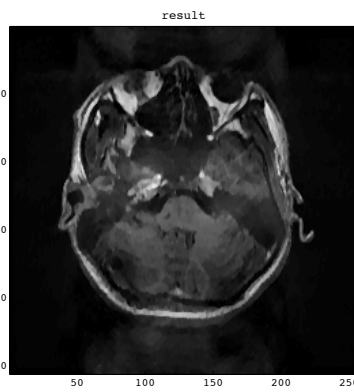
(b) 提案法による再構成結果



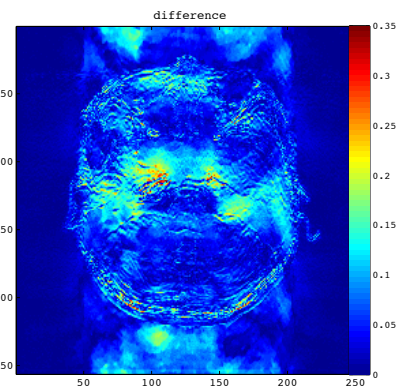
(c) 提案法による推定誤差



(d) 観測信号を逆フーリエ変換したもの

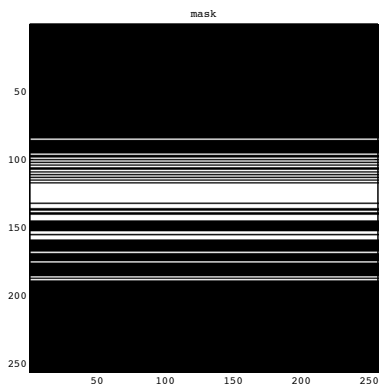


(e) 従来法 [8] による再構成結果

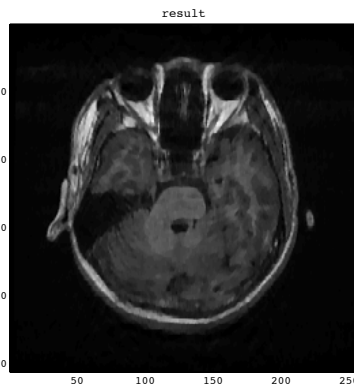


(f) 従来法 [8] による推定誤差

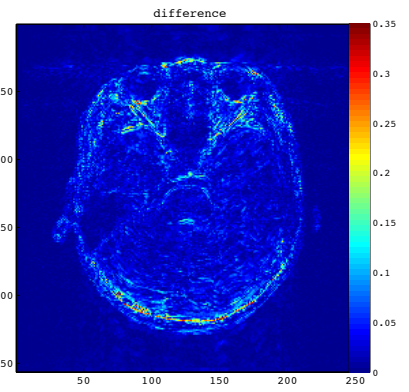
図 3: 圧縮率 1/5 における 40 番目の MR 画像の再構成結果



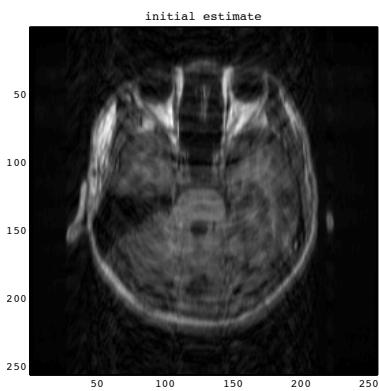
(a) 圧縮率 1/6 のときのマスク



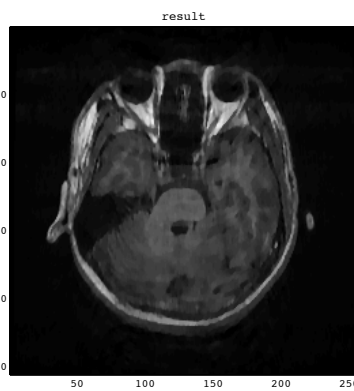
(b) 提案法による再構成結果



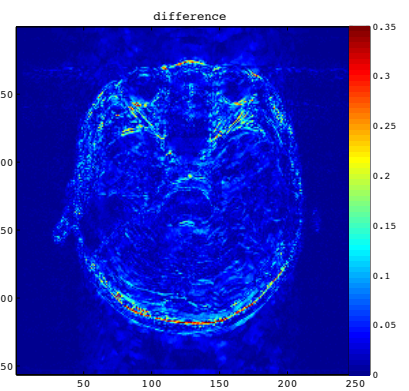
(c) 提案法による推定誤差



(d) 観測信号を逆フーリエ変換したもの



(e) 従来法 [8] による再構成結果



(f) 従来法 [8] による推定誤差

図 4: 圧縮率 1/6 における 50 番目の MR 画像の再構成結果